Vol. 34 Summer 2019 No. 2

Calculation of the Relative Premium based on Two-Point Inflated Poisson Model for Rate-Making System

Amir Teimour Payandeh NajafAbadi * Fatemeh Atatalab Ramezan Rezazadeh

1-Professor, Shahid Beheshti University.
2-Ph.D Student in Actuarial Science, Shahid Beheshti University.
3-Master of Actuarial Science, Shahid Beheshti University.

(DOI):10.22056/jir.2019.139100.2326

ABSTRACT

Objective: One of the most important issues facing insurance companies is the determination of fair premium. Since no claims history leads to a reduction in the premium, in this study we assume that insureds have some sort of censored behavior at two points i and j. The frequency of two points i and j is significantly high in the observations. In this paper, we use an inflated Poisson distribution of two points i and j to estimate relative premium in Bonus-Malus system.

Methodology: In this paper we use i-j inflated Poisson model for modeling hunger for bonus. The method used is an approximation based on Bayesian methods for estimators of credibility under quadratic and LINEX loss functions.

Findings: The numerical results show that if we model the phenomenon of customer hunger for bonus using two-point inflated Poisson models, the relative premium is significantly reduced which attracts customers. In addition, it is also shown that using the LINEX loss function is a suitable method to reduce the relative premium of customers.

Conclusion: In a rating system, an insurer's insurance records are used to calculate fair premiums. The problem addressed in this paper is modeling hunger for bonus based on non-reporting of small losses.
The results of the present paper show that: (1) Relative premium is significantly reduced when modeling hunger for bonus by using inflated Poisson models; (2) relative premium estimator under LINEX loss function is less than this premium under quadratic loss function.
Since Bonus-Malus system is based on number of claims, it cannot be a fair system, so it is recommended to use a system that incorporates both the number and severity of claims into the calculations.

Received:
2018 July 18
Accepted:
2019 August 26

Keywords:
Relative premium, Inflated Poisson distribution, Linear credibility, Loss function.

JEL Classification:
G22, C11, C13

* **Corresponding Author:** Amir Teimour Payandeh NajafAbadi

Email: Amirtpayande@sbu.ac.ir

محاسبهٔ حق‌بیمهٔ نسبی یک سیستم نرخ‌گذاری‌شده براساس مدل پواسون آماسیده در دو نقطه

امیرتیمور پاینده نجف‌آبادی* فاطمه عطاطلب رمضان رضازاده

۱- استاد گروه بیم‌سنجی، دانشگاه شهید بهشتی
۲- دانشجوی دکتری بیم‌سنجی، دانشگاه شهید بهشتی و پژوهشگر پژوهشکده بیمه
۳- کارشناسی ارشد بیم‌سنجی، دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۴/۲۷
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۰۴

کلیدواژه‌ها:
حق‌بیمهٔ نسبی، توزیع پواسون آماسیده، باورمندی خطی، تابع زیان.

طبقه‌بندی موضوعی:
G22, C11, C13

چکیده

هدف: یکی از مهم‌ترین مسائلی است که شرکت‌های بیمه با آن مواجه هستند تعیین حق‌بیمه عادلانه است. با توجه به این‌که سابقه عدم خسارت منجر به تخفیف در حق‌بیمه می‌شود لذا فرض می‌کنیم بیمه‌گذاران نوعی رفتار خاص در دو نقطهٔ i و j ارائه می‌کنند. به‌گونه‌ای که به صورت معنی‌داری فراوانی دو نقطهٔ i و j در مشاهدات زیاد است. هدف این مقاله برآورد حق‌بیمهٔ نسبی در سیستم نرخ‌گذاری‌شده تحت مدل‌های پواسون آماسیده در این دو نقطه است.

روش‌شناسی: در این تحقیق برای مدل‌بندی اشتیاق برای پاداش از یک توزیع پواسون آماسیده در دو نقطه i و j استفاده شده است روش مورد استفاده یک روش تقریبی مبتنی بر روش‌های بیزی برای برآوردگرهای باورمندی تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس است.

یافته‌ها: نتایج عددی به‌دست‌آمده حاکی از آن است که اگر از مدل‌های پواسون آماسیده در دو نقطه استفاده کنیم، حق‌بیمهٔ نسبی به طور معنی‌داری کاهش می‌یابد، که این امر در جذب مشتریان بیشتر تأثیر به‌سزایی دارد. همچنین نشان داده شد که استفاده از تابع زیان لاینکس ایدهٔ مناسبی برای کاهش حق‌بیمهٔ نسبی مشتریان است.

نتیجه‌گیری: در یک سیستم نرخ‌گذاری‌شده از سوابق بیمه‌ای یک بیمه‌گذار برای محاسبهٔ حق‌بیمهٔ عادلانه استفاده می‌شود. مسألهای که در این مقاله مورد تحقیق قرار گرفت مدل‌سازی اشتیاق بیمه‌گذاران برای دریافت تخفیف بر مبنای عدم گزارش خسارت‌های کوچک است.

نتایج مقاله حاضر نشان داد: (۱) اگر پدیدهٔ تمایل به پاداش مشتریان را با استفاده از مدل‌های پواسون آماسیده مدل‌بندی کنیم، نرخ حق‌بیمهٔ نسبی کاهش چشم‌گیری پیدا می‌کند؛ (۲) برآوردگر حق‌بیمهٔ نسبی تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق‌بیمهٔ نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست.

با توجه به این که سیستم پاداش– جریمه مبتنی بر تعداد خسارت‌هاست نمی‌تواند یک سیستم عادلانه باشد بنابراین توصیه می‌شود از سیستمی استفاده شود که هر دو عامل تعداد و شدت خسارت‌ها را در محاسبات دخیل کند.

نویسنده مسئول: امیرتیمور پاینده نجف‌آبادی*

پست الکترونیکی: Amirtpayande@sbu.ac.ir

مقدمه

قیمت‌گذاری محصولات بیمه‌ای یا به‌اصطلاح تعیین حق‌بیمه یکی از مهم‌ترین مسائلی است که شرکت‌های بیمه با آن مواجه‌اند. هدف از یک سیستم نرخ‌گذاری‌شده استفاده از سوابق بیمه‌ای بیمه‌گذار برای محاسبهٔ حق‌بیمه‌ای عادلانه است. مقدار حق‌بیمهٔ پرداختی توسط بیمه‌گذار در یک سیستم نرخ‌گذاری‌شده به عوامل نرخ‌گذاری دورهٔ جاری و علاوه بر آن، به سابقهٔ خسارتی بیمه‌گذار بستگی دارد. سیستم نرخ‌گذاری‌شده بیمه‌گذارانی را که طی یک‌سال، یک یا تعداد بیشتری ادعای خسارت داشته باشند جریمه می‌کند و به بیمه‌گذارانی که هیچ ادعای خسارتی ندارند تخفیف می‌دهد. هدف از سیستم نرخ‌گذاری تعیین نرخ حق‌بیمهٔ آتی بیمه‌گذارهای طبقه‌بندی‌شده برمبنای متوسط تعداد ادعای خسارت در t سال گذشته است.

همانند سیستم‌های پاداش- جریمه، حق‌بیمه در یک سیستم نرخ‌گذاری‌شده از ضرب حق‌بیمهٔ نسبی در حق‌بیمهٔ پایه به‌دست می‌آید. حق‌بیمهٔ نسبی براساس فراوانی خسارت‌های ادعاشده و حق‌بیمهٔ پایه براساس شدت خسارت‌های وارده محاسبه می‌شود.

پرتفوی یک شرکت بیمه با n بیمه‌گذار متفاوت را در نظر بگیرید. اگر Y_{ij} نشان‌دهندهٔ تعداد خسارت‌های ادعاشده در بازهٔ زمانی $(j-1,j]$ توسط بیمه‌گذار iام باشد، مجموع خسارت‌های هر بیمه‌گذار تا زمان t برای $i = 1,2,\dots,n$ برابر است با:

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^{t} Y_{ij} \qquad (۱)$$

و حق‌بیمهٔ سال $t+1$ام تحت یک سیستم نرخ‌گذاری‌شده برابر است با:

$$P_i(t+1) = BP(t+1) \times Rate(Y_{i.}(t);t) \qquad (۲)$$

که در آن $BP(t+1)$ حق‌بیمه پایهٔ سال $(t+1)$ام برای همهٔ n بیمه‌گذار و $Rate(Y_{i.}(t);t)$ حق‌بیمهٔ نسبی برای فرد iام است. حق‌بیمهٔ نسبی $Rate(Y_{i.}(t);t)$ معمولاً با استفاده از برآوردگرهای بیز تحت توابع زیان متفاوت در یک سیستم نرخ‌گذاری‌شده محاسبه می‌شود (دینویت و دان،[1] ۲۰۰۱).

فرض کنید مجموع تعداد خسارت‌های ادعاشده از سوی بیمه‌گذار iام تا زمان t، $Y_{i.}$، به شرط پارامتر ریسک $\Theta = \theta$، دارای توزیع پواسون آماسیده در i و j و پارامتر ریسک دارای توزیع پیشین گاما است.

هدف از نگارش این مقاله به‌کارگیری روش تقریبی پاینده (۲۰۱۰)، برای برآورد $Rate(Y_{i.}(t);t)$ تحت توابع زیان مربع خطا و لاینکس است؛ به‌عبارت‌دیگر، برآورد $Rate(Y_{i.}(t);t)$ به کمک این رابطه امکان‌پذیر می‌شود:

1. Denuit & Dhaene

$$Rate(Y_{i.}(t);t) = \alpha_{opt}^{(i)}\bar{Y}_{i.}(t) + (1-\alpha_{opt}^{(i)})\mu \quad (۳)$$

که در آن $\bar{Y}_{i.}(t) := Y_{i.}(t)/t$ و μ میانگین توزیع پیشین است.

در این مقاله، ابتدا به بیان پیشینهٔ پژوهش خواهیم پرداخت و سپس برخی از مفاهیم و تعاریف موردنیاز برای سایر بخش‌ها ارائه خواهد شد. در بخش بعد، تئوری اصلی را بیان خواهیم کرد و با تلفیق ایدهٔ ارائه‌شده توسط پاینده (۲۰۱۰)، یک روش تقریبی مبتنی بر روش‌های بیزی برای برآوردگرهای باورمندی تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس ارائه خواهیم داد. در ادامه، با استفاده از نتایج به‌دست‌آمده در بخش قبل، حق‌بیمهٔ نسبی برای سیستم پاداش- جریمهٔ ایران را محاسبه خواهیم کرد و درنهایت، در بخش پایانی به نتیجه‌گیری و ارائهٔ پیشنهاد خواهیم پرداخت.

۱. مروری بر پیشینهٔ تحقیق

لانگ[1] (۱۹۶۹) از ابزارهای آماری و ریاضی برای محاسبهٔ حق‌بیمه در یک سیستم نرخ‌گذاری‌شده استفاده کرد.

دینویت و دان (۲۰۰۱) از تابع زیان نمایی برای محاسبهٔ حق‌بیمهٔ نسبی استفاده کردند. برمودز و همکاران[2] (۲۰۰۱) نشان دادند که برآوردگر باورمندی تحت تابع زیان نمایی کمتر از برآوردگر باورمندی تحت تابع زیان مربع خطا است.

موریلو و برمودز[3] (۲۰۰۳) از مدل پواسون گوسین[4] معکوس برای تعداد ادعاهای گزارش‌شده استفاده کردند و نتیجه گرفتند که برآوردگر بیز تحت تابع زیان نمایی در مقایسه با تابع زیان مربع خطا بهتر است.

بوشر و دینویت[5] (۲۰۰۸) برای محاسبهٔ حق‌بیمهٔ باورمندی در مدل‌های آماسیده در صفر برای داده‌های پانل استفاده کردند و نشان دادند مدل‌های آماسیده در صفر برای به‌دست‌آوردن حق‌بیمهٔ باورمندی انعطاف‌پذیرتر هستند.

پاینده و محمدپور (۲۰۱۷) از یک مدل رگرسیونی/ توزیع آمیختهٔ دوجمله‌ای منفی آماسیده در k به‌عنوان یک جایگزین قابل‌انعطاف به جای مدل رگرسیونی/ توزیع پواسون آماسیده در صفر استفاده کردند.

1. Lange
2. Bermúdez et al.
3. Morillo & Bermúdez
4. Gaussian
5. Boucher & Denuit

۲. تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش چند تعریف مقدماتی موردنیاز را بیان می‌کنیم. شرکت‌های بیمه ریسک‌های زیادی را بیمه می‌کنند، شرکت‌ها با هدف نرخ‌گذاری، این ریسک‌ها را در رده‌های مشابه دسته‌بندی می‌کنند. به‌منظور دسته‌بندی ریسک بیمه‌گذاران و محاسبهٔ حق‌بیمهٔ نسبی در سیستم نرخ‌گذاری‌شده لازم است فاکتورهای نامعلومی در محاسبات منظور شوند که باعث پیچیدگی محاسبات می‌شوند. برآوردگر بیز برآوردگر معقول و قابل‌قبولی برای رفع این مشکل و انجام محاسبات است. متأسفانه، در بسیاری از موارد، برآوردگر بیز به‌دست‌آمده را نمی‌توان به فرم برآوردگر باورمندی دقیق بازنویسی کرد. برای حل این مشکل، پاینده (۲۰۱۰) با استفاده از حداقل‌کردن میانگین مربع خطا روشی را ارائه داد که در آن می‌توان برآوردگر بیز را به‌صورت تقریبی به فرم برآوردگر باورمندی بازنویسی کرد. لم ۱ از پاینده (۲۰۱۰) نشان می‌دهد چگونه می‌توان برآوردگر بیز را در فرمول باورمندی بیان کرد.

لم ۱. فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ به شرط پارامتر ریسک $\Theta = \theta$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین $\mu(\theta) := E(X|\theta)$ باشند. همچنین فرض کنید پارامتر ریسک Θ دارای توزیع پیشین π با میانگین μ باشد، یا به‌عبارت‌دیگر $\mu = E_\pi(\theta)$ و δ_π برآوردگر بیز تحت تابع زیان ρ و تابع پیشین π باشد. آن‌گاه، در میان تمام کلاس برآوردگرهای باورمندی،

$$D := \{\delta(x) = \beta\bar{x} + (1-\beta)\mu : \beta\epsilon[0,1]\}$$

برآوردگر δ_{opt}

$$\delta_{opt} = \alpha_{opt}\bar{x} + (1-\alpha_{opt})\mu$$

با

$$\alpha_{opt} = \frac{E\big((\bar{x}-\mu)(\delta_\pi(x)-\mu)\big)}{E\big((\bar{x}-\mu)^2\big)}$$

کمترین فاصلهٔ میانگین مربع خطا بین δ_π و δ_β را دارد. به‌عبارت‌دیگر:

$$\delta_{opt} = argmin(\delta_\pi(x) - \delta_\beta(x))^2$$

که در آن $x = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ و $argmin$ شناسهٔ مینیمم‌کنندهٔ تابع است.

حق‌بیمهٔ نسبی در سیستم نرخ‌گذاری‌شده برمبنای تعداد ادعاهای گزارش‌شده در یک دورهٔ زمانی محاسبه می‌شود. از این رو، برخی از بیمه‌گذاران ترجیح می‌دهند ادعایی را گزارش ندهند. این پدیده، پدیدهٔ اشتیاق برای پاداش نامیده می‌شود که منجر به پدیدآمدن تعداد زیادی صفر در مدل می‌شود. این پدیده، در سیستم نرخ‌گذاری‌شده عادی است و توسط مدل‌های آماسیده در صفر مدل می‌شود (پاینده و همکاران، ۲۰۱۷).

پدیدهٔ اشتیاق برای پاداش فقط مختص افراد با صفر ادعا در سال جاری نیست بلکه برای همهٔ افراد در همهٔ رده‌ها صادق است. مسلماً کسانی که در سال جاری حداقل یک خسارت را گزارش داده‌اند، اگر خسارت کوچک دیگری در همین سال به آن‌ها وارد شود، برای جلوگیری از انتقال به رده‌های بالاتر با حق‌بیمهٔ بیشتر، تمایل ندارند این خسارت کوچک را گزارش دهند یا رفتاری را مرتکب شوند که یک

امتیاز منفی محسوب شود. به‌طور مثال، فرض کنید در یک سیستم پاداش–جریمه، قانون انتقال به این صورت باشد که اگر فردی در سال جاری فقط یک بار ادعای خسارت داشته باشد به ردهٔ دوم و اگر دو بار ادعای خسارت داشته باشد به ردهٔ چهارم منتقل شود؛ بنابراین مشتریانی که قبلاً یک ادعای خسارت داشته‌اند تمایل ندارند به خاطر خسارتی ناچیز به رده‌های بالاتر با حق‌بیمهٔ بیشتر منتقل شوند.

در این مقاله، فرض می‌کنیم در دو نقطهٔ i و j اشتیاق برای پاداش داشته باشیم. به بررسی پدیدهٔ اشتیاق برای پاداش روی توزیع تعداد ادعاها با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در این دو نقطه می‌پردازیم و حق‌بیمهٔ نسبی در سیستم نرخ‌گذاری‌شده تحت مدل‌های پواسون آماسیده در این دو نقطه را برآورد می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا به تعریف تابع توزیع پواسون آماسیده در i و j می‌پردازیم.

تعریف ۱. متغیر تصادفی Y تحت سه پارامتر θ، ω_2 و ω_1 دارای توزیع پواسون آماسیده در i و j است $\{i,j\}-IP(\theta,\omega_1,\omega_2)$، هرگاه تابع جرم احتمال آن به شکل زیر باشد:

$$\begin{aligned}p_Y(y|\theta,\omega_1,\omega_2) &= \left(\omega_1+(1-\omega_1-\omega_2)\frac{e^{-\theta}\theta^i}{i!}\right)I_{\{i\}}(y)\\ &+\left(\omega_2+(1-\omega_1-\omega_2)\frac{e^{-\theta}\theta^j}{j!}\right)I_{\{j\}}(y)\\ &+(1-\omega_1-\omega_2)\frac{e^{-\theta}\theta^y}{y!}I_{\{1,2,\dots\}}(y)\end{aligned}$$

که در آن $\theta>0$ و $\omega_1,\omega_2\in[0,1]$، توزیع $\{i,j\}$-IP یک ترکیب وزنی از نقاط i و j و تابع جرم احتمال پواسون برای کلیهٔ نقاط است (رضیئی و همکاران، ۲۰۱۶).

در ادامه، توزیع حاشیه‌ای متغیر تصادفی Y را در قالب قضیهٔ ۱ به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۱. فرض کنید متغیر تصادفی Y به شرط $\Theta=\theta$ و ω_1,ω_2 دارای توزیع $\{i,j\}$-IP $(\theta t,\omega_1,\omega_2)$ و همچنین Θ دارای توزیع گاما با پارامترهای (β,τ) باشد. آن‌گاه:

الف) توزیع حاشیه‌ای Y برابر است با:

$$p_Y(y)=\begin{cases}\omega_1+(1-\omega_1-\omega_2)\dfrac{t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}} & ,y=i\\ \omega_2+(1-\omega_1-\omega_2)\dfrac{t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}} & ,y=j\\ (1-\omega_1-\omega_2)\dfrac{\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)}\left(\dfrac{t}{t+\tau}\right)^y\left(\dfrac{\tau}{t+\tau}\right)^\beta & ,\begin{matrix}y=0,1,\dots\\ y\neq i,j\end{matrix}\end{cases}$$

ب) تابع چگالی پسین Y برابر است با:

$$p_{\Theta|Y}(\theta|y)=\begin{cases}\left(\dfrac{\omega_1+(1-\omega_1-\omega_2)\dfrac{e^{-\theta t}(\theta t)^i}{\Gamma(i+1)}}{\omega_1+\dfrac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+\beta)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}}\right)\dfrac{\tau^\beta\theta^{\beta-1}e^{-\tau\theta}}{\Gamma(\beta)} & ,y=i\\ \left(\dfrac{\omega_2+(1-\omega_1-\omega_2)\dfrac{e^{-\theta t}(\theta t)^j}{\Gamma(j+1)}}{\omega_{2_1}+\dfrac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+\beta)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}}\right)\dfrac{\tau^\beta\theta^{\beta-1}e^{-\tau\theta}}{\Gamma(\beta)} & ,y=j\\ \dfrac{\theta^{y+\beta-1}e^{-\theta(t+\tau)}(t+\tau)^{y+\beta}}{\Gamma(y+\beta)} & ,\begin{matrix}y=0,1,\dots\\ y\neq i,j\end{matrix}\end{cases}$$

برهان الف) می‌دانیم فرم کلی به‌دست‌آوردن توزیع حاشیه‌ای به این صورت است:

$$p_Y(y)=\int_0^\infty p_{\Theta|Y}(\theta|y)f_\Theta(\theta)d\theta$$

بنابراین با توجه به فرم چگالی پیشین، توزیع حاشیه‌ای *{i,j}-IP* را در سه حالت زیر محاسبه می‌کنیم:

۱. برای $y=i$:

$$p_Y(y)=\int_0^\infty\left(\omega_1+(1-\omega_1-\omega_2)\frac{e^{-\theta t}(\theta t)^i}{i!}\right)f_\Theta(\theta)d\theta$$

$$=\int_0^\infty\omega_1 f_\Theta(\theta)d\theta+(1-\omega_1-\omega_2)\int_0^\infty\frac{e^{-\theta(t+\tau)}\tau^\beta\theta^{1+\beta-1}t^i}{\Gamma(\beta)\Gamma(i+1)}d\theta$$

قسمت دوم رابطهٔ بالا را در $\frac{(i+\beta_i)}{(\tau_i+t)^{i+\beta_i}}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$p_Y(y)=\omega_1+(1-\omega_1-\omega_2)\frac{t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\tag{۴}$$

۲. برای $y=j$، برهان مشابه حالت $y=i$ است. فقط کافی است در رابطهٔ (۴) به جای i، j را قرار دهیم.

$$p_Y(y)=\omega_2+(1-\omega_1-\omega_2)\frac{t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}$$

۳. برای $y=0,1,2,\dots,\ y\neq i,j$، توزیع حاشیه‌ای به این صورت است:

$$p_Y(y)=\int_0^\infty(1-\omega_1-\omega_2)\frac{e^{-\theta t}(\theta t)^y e^{-\theta\tau}\tau^\beta\theta^{\beta-1}}{y!}d\theta$$

$$=(1-\omega_1-\omega_2)\int_0^\infty\frac{e^{-\theta(t+\tau)}\tau^\beta t^y\theta^{y+\beta-1}}{\Gamma(\beta)\Gamma(y+1)}d\theta$$

رابطهٔ بالا را در عبارت $\frac{(y+\beta)}{(\tau+t)^{y+\beta}}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم، لذا داریم:

$$p_Y(y)=(1-\omega_1-\omega_2)\frac{\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)}\left(\frac{t}{t+\tau}\right)^y\left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^\beta$$

به این ترتیب، برهان قسمت الف کامل می‌شود.

برهان ب) می‌دانیم توزیع پسین به این شکل محاسبه می‌شود:

$$p_{\Theta|Y}(\theta|y)=\frac{\pi(\theta)p_{Y|\Theta}(y|\theta)}{p_Y(y)} \qquad (۵)$$

در حالتی که $y=i,j$ کافی است $\pi(\theta)$، $p_{Y|\Theta}(y=i,j|\theta)$، $p_Y(y=i,j)$ به‌دست‌آمده را در رابطهٔ (۵) جای‌گذاری کنیم. بدین‌ترتیب برهان قسمت ب کامل می‌شود. برای $y\neq i,j$، با استفاده از رابطهٔ (۵)، داریم:

$$p_{\Theta|Y}(\theta|y)=\frac{(1-\omega_1-\omega_2)\dfrac{e^{-\theta t}(\theta t)^y}{y!}\dfrac{\tau^\beta\theta^{\beta-1}e^{-\tau\theta}}{\Gamma(\beta)}}{(1-\omega_1-\omega_2)\dfrac{\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)}(\dfrac{t}{t+\tau})^y(\dfrac{\tau}{t+\tau})^\beta}$$
$$=\frac{\theta^{y+\beta-1}e^{-\theta(t+\tau)}}{\Gamma(y+\beta)(\dfrac{1}{t+\tau})^y(\dfrac{1}{t+\tau})^\beta}$$
$$=\frac{\theta^{y+\beta-1}e^{-\theta(t+\tau)}(t+\tau)^{y+\beta}}{\Gamma(y+\beta)}$$

۳. محاسبهٔ عامل باورمندی برمبنای توزیع پواسون آماسیده در i و j

اگر تعداد ادعاها به شرط پارامتر ریسک $\Theta=\theta$ دارای توزیع *{i,j}-IP* و پارامتر ریسک دارای توزیع پیشین گاما باشد، به‌سادگی می‌توان نشان داد برآوردگر بیز به‌دست‌آمده تحت تابع زیان مربع خطا و لاینکس را نمی‌توان به فرم برآوردگر باورمندی دقیق بازنویسی کرد. بنابراین برای اینکه بتوانیم به‌طور تقریبی برآوردگر بیز را به فرم برآوردگر باورمندی بازنویسی کنیم، از لم ۱ برای تقریب‌زدن برآوردگر باورمندی در این بخش استفاده می‌کنیم.

فرض کنید پرتفوی یک شرکت بیمه شامل n بیمه‌گذار است. همچنین فرض کنید تحت سیستم نرخ‌گذاری‌شده، حق‌بیمهٔ نسبی سال $(t+1)$ام براساس معادلهٔ (۲) محاسبه می‌شود. در این بخش به بررسی تأثیر پدیدهٔ اشتیاق برای پاداش روی توزیع تعداد ادعاها با استفاده از توزیع پواسون آماسیده *{i,j}-IP* پرداخته و حق‌بیمهٔ نسبی را تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۲. فرض کنید متغیر تصادفی Y (توزیع تعداد خسارت‌ها تا زمان t) برای پارامتر داده‌شده $\Theta=\theta$ دارای توزیع پواسون آماسیده در i و j با پارامتر ریسک θ باشد. همچنین اگر Θ دارای توزیع پیشین $gamma(\beta,\tau)$ باشد، آن‌گاه حق‌بیمهٔ نسبی $Rate_{Quad}(Y;t)$ تحت تابع زیان مربع خطا برای بیمه‌گذار iام به این صورت است:

$$Rate_{Quad}(\bar{Y};t)=\alpha_{opt}^{(i)}\bar{Y}+\left(1-\alpha_{opt}^{(i)}\right)\frac{\beta}{\tau}$$

که در آن

$$\alpha_{opt}^{(i)} = \frac{E(\bar{Y}\delta_\pi(Y)) + E(Y)E(\delta_\pi(Y))}{\frac{1}{t}var(Y)}$$

برهان. با استفاده از قضیهٔ ۱ می‌توان نشان داد برآوردگر بیز تحت تابع زیان مربع خطا به صورت زیر است:

$$\delta_\pi(Y) = \left[\frac{\beta\omega_1}{\tau\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}}\right] I_{\{i\}}(y) + \left[\frac{\beta\omega_2}{\tau\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}}\right] I_{\{j\}}(y) + \left[\frac{y+\beta}{t+\tau}\right] I_{\substack{\{0,1,\dots\}\\ y\neq i,j}}(y).$$

برای محاسبهٔ $\alpha_{opt}^{(i)}$، ابتدا باید $E[\bar{Y}(t)\delta_\pi(Y(t))]$ و $E[\delta_\pi(Y(t))]$ را محاسبه کنیم:

$$E[\bar{Y}(t)\delta_\pi(Y)] = \left[\frac{i}{t}\delta_\pi(i)\right]P_Y(i) + \left[\frac{j}{t}\delta_\pi(j)\right]P_Y(j) + \sum_{\substack{Y=0,1,\dots\\ y\neq i,j}} \frac{Y}{t}\delta_\pi(Y)P(Y)$$

$$= \frac{i}{t}\left(\frac{\beta\omega_1}{\tau\left(\omega_1+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_1+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}}\right) \times \left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right) + \frac{j}{t}\left(\frac{\beta\omega_2}{\tau\left(\omega_2+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_2+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}}\right) \times \left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right) + \sum_{\substack{Y=0,1,\dots\\ y\neq i,j}}^{\infty} \frac{y}{t}\frac{y+\beta}{t+\tau}\frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)}\left(\frac{t}{t+\tau}\right)^y\left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^\beta$$

$$= \frac{i}{t}\left(\frac{\beta\omega_1}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(i+\beta+1)t^i\tau^\beta}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}\right) + \frac{j}{t}\left(\frac{\beta\omega_2}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(j+\beta+1)t^j\tau^\beta}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}\right) + \sum_{\substack{Y=0,1,\dots\\ y\neq i,j}}^{\infty} \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta+1)}{t(t+\tau)\Gamma(y)\Gamma(\beta)}\left(\frac{t}{t+\tau}\right)^y\left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^\beta$$

از این رو:

$$E[\bar{Y}\delta_\pi(Y)] = \frac{i}{t\tau}\beta\omega_1 + \frac{j}{t\tau}\beta\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\beta(\beta+1)}{\tau^2}$$

و

$$E[\delta_\pi(Y)] = [\delta_\pi(Y=i)]P_Y(y=i) + [\delta_\pi(Y=j)]P_Y(y=j) + \sum_{\substack{Y=0,1,\dots \\ y\neq i,j}}^{\infty} \delta_\pi(Y)P_Y(y)$$

$$E[\delta_\pi(Y)] = \left(\frac{\beta\omega_1}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}\right) + \left(\frac{\beta\omega_2}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}\right) + \sum_{\substack{Y=0,1,\dots \\ y\neq i,j}}^{\infty} \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta+1)}{(t+\tau)\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)}\left(\frac{t}{t+\tau}\right)^y\left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^\beta$$

بنابراین:

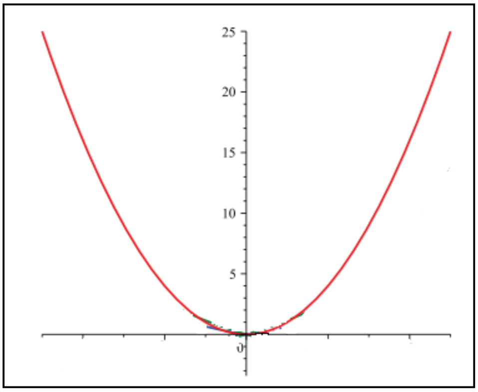
$$E[\delta_\pi(Y)] = \frac{\beta\omega_1}{\tau} + \frac{\beta\omega_2}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\beta}{\tau}$$

با جای‌گذاری روابط بالا در لم ۱ برهان کامل می‌شود.

بسیاری از آموزه‌های آمار کلاسیک، بر پایهٔ تابع زیان مربع خطا استوار است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(\theta,\hat{\theta}) = (\theta-\hat{\theta})^2$$

این تابع زیان از دیدگاه تئوری باعث سادگی محاسبات ریاضی در حصول برآوردگرها می‌شود. نمودار ۱ رفتار تابع زیان مربع خطا را نشان می‌دهد.



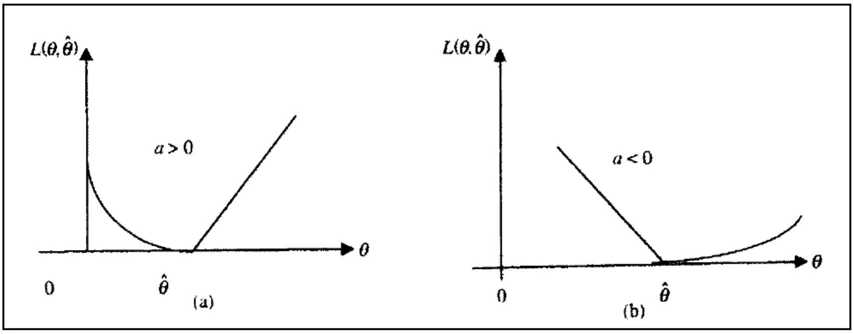
نمودار ۱. تابع زیان مربع خطا

تابع زیان مربع خطا جریمه‌های یکسانی را به خطاهای مثبت و منفی در هنگام برآورد می‌دهد. این امر باعث می‌شود که جریمهٔ خطای بیش‌برآورد و کم‌برآورد یکسان باشد. از دیدگاه کاربردی، با توجه به اینکه معمولاً زیان‌های حاصل از خطای بیش‌برآورد و خطای کم‌برآورد اهمیت یکسانی ندارند، استفاده از این تابع زیان توجیه‌پذیر نیست. برآورد کم حق‌بیمه برای شرکت بیمه بسیار خطرناک‌تر از برآورد زیاد آن است. در مباحث نرخ‌گذاری بیمه می‌توان گفت برآوردگر بیز تحت تابع زیان مربع

خطا، هیچ تمایز معنی‌داری بین بیش‌برآورد و یا کم‌برآورد حق‌بیمه قائل نمی‌شود. بنابراین بهتر است از یک تابع زیان نامتقارن برای برآورد استفاده شود. شاید بتوان گفت تابع زیان نامتقارن لاینکس جایگزین مناسبی برای تابع زیان مربع خطا است. این تابع زیان جریمهٔ متفاوتی بین بیش‌برآورد و یا کم‌برآورد حق‌بیمه قائل می‌شود. فرم ریاضی تابع زیان لاینکس به این صورت است:

$$L_{Linex} = exp\{a(\hat{\theta} - \theta)\} - a(\hat{\theta} - \theta) - 1$$

که در آن $b>0$ و $a\neq 0$ است. نمودار ۲ رفتار تابع زیان لاینکس را نسبت به حالت‌های مختلف a به تصویر می‌کشد.



نمودار ۲. (a) **تابع زیان لاینکس برای** $a>0$ **و** (b) **تابع زیان لانکس برای** $a<0$

قضیهٔ ۳ حق‌بیمهٔ نسبی $Rate_{LINEX}(Y;t)$ را تحت تابع زیان لاینکس ارائه می‌کند.

قضیه ۳. فرض کنید متغیر تصادفی Y (توزیع تعداد خسارت‌ها تا زمان t) برای پارامتر داده‌شده $\Theta = \theta$، دارای توزیع پواسون آماسیده در i و j با پارامتر شدت θ باشد. همچنین اگر θ دارای توزیع پیشین $gamma(\beta,\tau)$ باشد، آن‌گاه حق‌بیمهٔ نسبی $Rate_{LINEX}(Y;t)$ ، تحت تابع زیان لاینکس برای فردiام به صورت زیر است:

$$Rate_{LINEX}(\bar{Y}:t) = \alpha_{opt}^{(i)}\bar{Y} + (1 - \alpha_{opt}^{(i)})\frac{\beta}{\tau}$$

که در آن:

$$\alpha_{opt}^{(i)} = \frac{E\left(\bar{Y}\delta_{\pi}(Y)\right) + E(Y)E(\delta_{\pi}(Y))}{\frac{1}{t}var(Y)}$$

برهان. برآوردگر بیز تحت تابع زیان لاینکس از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\delta_{\pi}(Y) = -\frac{1}{a}\left(E_{\pi}\left(e^{-a\theta}\middle|y\right)\right)$$

و

$$E\left(e^{-a\theta}\middle|y\right)=E\left(e^{-a\theta}\middle|y=i\right)+E\left(e^{-a\theta}\middle|y=j\right)+E\left(e^{-a\theta}\middle|y\begin{matrix}=0,1,\dots\\ \neq i,j\end{matrix}\right)$$

بنابراین با توجه به قضیهٔ ۱، برآوردگر بیز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\delta_\pi(y)=&-\frac{1}{a}ln\left[\left[\frac{\frac{\omega_1\tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_1+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)}\right.\right.\\&\left.+\frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_1+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}}\right]I_{\{i\}}(y)\\&+-\frac{1}{a}ln\left[\frac{\frac{\omega_2\tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_2+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)}\right.\\&\left.+\frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_2+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}}\right]I_{\{j\}}(y)\\&-\frac{1}{a}ln\left[\left(\frac{t+\tau}{t+\tau+a}\right)^{y+\beta}\right]I_{\substack{\{0,1,\dots\}\\ y\neq i,j}}(y)\end{aligned}$$

اکنون باید $E[\bar{Y}\delta_\pi(Y)]$ و $E[\delta_\pi(Y)]$ را محاسبه کنیم:

$$E[\bar{Y}\delta_\pi(Y)]=\left[\frac{i}{t}\delta_\pi(i)\right]P_Y(i)+\left[\frac{j}{t}\delta_\pi(j)\right]P_Y(j)+\sum_{\substack{Y=0,1,\dots\\ y\neq i,j}}\delta_\pi(y)P_Y(y)$$

$$= -\frac{i}{ta} ln\left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}}\right]$$

$$\times\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)$$

$$-\frac{j}{ta} ln\left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}}\right]$$

$$\times\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)$$

$$+ \sum_{\substack{Y=0,1,\dots \\ y\neq i,j}} \frac{y(y+\beta)}{ta} ln\left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau}\right) \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t+\tau}\right)^y \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^\beta$$

پس از ساده‌کردن عبارت بالا داریم:

$$E[\bar{Y}\delta_\pi(Y)] == -\frac{i}{ta} ln\left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^\beta\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}}\right] \times P_Y(Y=i)$$

$$-\frac{j}{ta} ln\left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^\beta\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}}\right] P_Y(Y=j) + (1$$

$$-\binom{i+\beta}{i-1}\left(\frac{t}{t+\tau}\right)^{i-1}\left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta+2} - \binom{j+\beta}{j-1}\left(\frac{t}{t+\tau}\right)^{j-1}\left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta+2}$$

$$\times \left(\frac{(1-\omega_1-\omega_2)(t+\tau)}{\tau^2 a} ln\left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau}\right)\right)$$

و

$$E[\delta_\pi(Y)] = [\delta_\pi(Y=i)]P_Y(y=i) + [\delta_\pi(Y=j)]P_Y(y=j) + \sum_{\substack{Y=0,1,\dots \\ y\neq i,j}}^{\infty} \delta_\pi(Y)P_Y(y)$$

$$= -\frac{1}{a} ln \left[\frac{\frac{\omega_1\tau^{\beta}}{(\tau+a)^{\beta}}}{\left(\omega_1+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)}+\frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_1+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}}\right]$$

$$\times\left(\omega_1+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)$$

$$-\frac{1}{a} ln \left[\frac{\frac{\omega_2\tau^{\beta}}{(\tau+a)^{\beta}}}{\left(\omega_2+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)}+\frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_2+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}}\right]$$

$$\times\left(\omega_2+\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)$$

$$+\sum_{\substack{Y=0,1,\dots\\ y\neq i,j}}^{\infty}\frac{(y+\beta)}{a} ln\left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau}\right)\frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)}\left(\frac{t}{t+\tau}\right)^{y}\left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta}$$

$$= -\frac{1}{a} ln \left[\frac{\frac{\omega_1\tau^{\beta}}{(\tau+a)^{\beta}}}{P_Y(y=i)}+\frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{P_Y(y=i)}\right]\times P_Y(y=i)$$

$$-\frac{1}{a} ln \left[\frac{\frac{\omega_2\tau^{\beta}}{(\tau+a)^{\beta}}}{P_Y(y=j)}+\frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{P_Y(y=j)}\right]\times P_Y(y=j)$$

$$+\left(1-\binom{i+\beta}{i-1}\left(\frac{t}{t+\tau}\right)^{i-1}\left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta+1}-\binom{j+\beta}{j-1}\left(\frac{t}{t+\tau}\right)^{j-1}\left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta+1}\right)$$

$$\times\left(\frac{\beta(1-\omega_1-\omega_2)(t+\tau)}{\tau a} ln\left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau}\right)\right)$$

با جای‌گذاری دو امید ریاضی بالا در لم ۱، برهان کامل می‌شود.

۴. ارائهٔ یک مثال واقعی

با استفاده از نتایج بخش قبل، در این بخش به محاسبهٔ حق‌بیمهٔ نسبی تحت تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای بعضی از وسایل نقلیه‌ای که در سیستم پاداش- جریمه بیشترین تعداد را دارند و دارای بیمهٔ شخص ثالث هستند، می‌پردازیم. همچنین برای برآورد پارامترهای توزیع ادعا از روش برآوردگر بیز تجربی استفاده خواهیم کرد. توزیع فراوانی خسارت و برازش پارامترهای توزیع پواسون آماسیده به‌صورت جدول و نموداری بررسی شده است. داده‌های موردبررسی مربوط به اطلاعات خسارت بیمه‌گذاران رشتهٔ بیمهٔ شخص ثالث اتومبیل در سال ۱۳۸۹ برای صنعت بیمهٔ ایران است. اطلاعات به‌دست‌آمده برای هر وسیلهٔ نقلیه براساس یک‌سال (۱۳۸۹) جمع‌آوری شده است، بنابراین متغیر زمان (t) برای تعیین حق‌بیمهٔ وسایل نقلیه برابر یک است اما به‌منظور مطالعات مقایسه‌ای بیشتر فرض می‌کنیم این اطلاعات در مدت‌زمان بیشتری جمع‌آوری شده‌اند (مثلاً $t=2$). با استفاده از داده‌های بانک اطلاعاتی بیمهٔ مرکزی برای پدیدهٔ تمایل به پاداش بیمه‌گذاران از اختلاف احتمال تصادف برای هر وسیلهٔ نقلیه و احتمال ادعای گزارش استفاده کرده‌ایم. درادامه به محاسبهٔ حق‌بیمهٔ نسبی به تفکیک وسایل نقلیه می‌پردازیم.

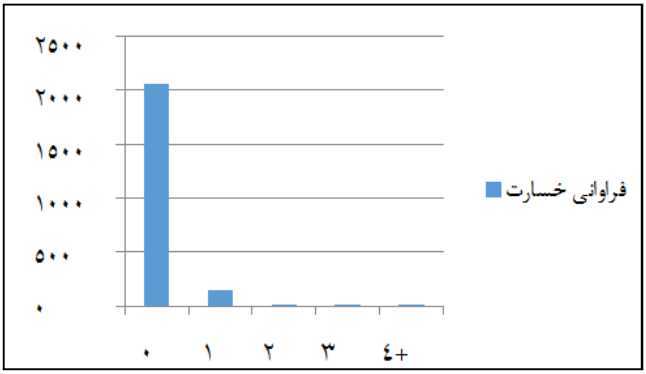
اتومبیل سواری نوع ۱ (کمتر از ۴ سیلندر):

این گروه کمترین درصد اعلام خسارت را نسبت به سایر سواری‌ها داشته‌اند. اطلاعات مربوط به این نوع بیمه‌نامه در جدول ۱ و نمودار ۳ ارائه شده است.

جدول ۱. توزیع تعداد اعلام خسارت‌ها برای اتومبیل سواری نوع یک

تعداد خسارت‌های اعلام شده (k)	فراوانی (تعداد بیمه‌نامه با k ادعای خسارت)	درصد فراوانی	درصد فراوانی تجمعی
۰	۲۰۵۵	۹۲/۸۵	۹۲/۸۵
۱	۱۴۸	۶/۶۵	۹۹/۵۰
۲	۵	۰/۲۵	۹۹/۷۵
۳	۳	۰/۱۵	۹۹/۹۰
۴ و بیشتر	۲	۰/۱۰	۱۰۰

منبع: یافته‌های محققان

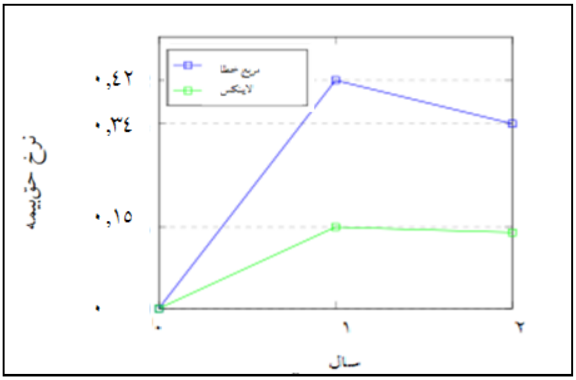


نمودار ۳. فراوانی خسارت اتومبیل سواری نوع ۱

با استفاده از داده‌ها، پارامترهای مدل برای این وسیلهٔ نقلیه بدین‌صورت برآورد می‌شود:

$$a = 0.5 \ , \ \omega_1 = 0.05 \ , \ \omega_2 = 0.01 \ , \quad \beta = 7 \ , \quad \tau = 0.009$$

در نمودار ۴ حق‌بیمهٔ نسبی محاسبه‌شده تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای این وسیلهٔ نقلیه با استفاده از نتایج قضیه‌های ۲ و ۳ به‌دست آمده است. این نمودار نشان می‌دهد برآوردگر حق‌بیمهٔ نسبی، با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در صفر و یک، تحت تابع زیان لاینکس، کمتر از این حق‌بیمهٔ نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست. همچنین نشان می‌دهد پدیدهٔ اشتیاق به پاداش برای ادعاها، تأثیر چشم‌گیری در میزان حق‌بیمهٔ نسبی خواهد داشت.



نمودار ۴. نرخ حق‌بیمهٔ نسبی تحت مدل پواسون آماسیده در صفر و یک برای سواری نوع ۱

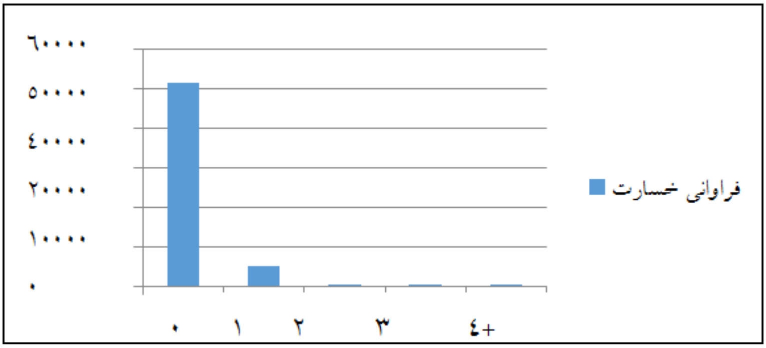
اتومبیل سواری نوع ۲ (۴ سیلندر):

اطلاعات مربوط به خسارت‌های این نوع وسیلهٔ نقلیه در جدول ۲ و نمودار ۵ ارائه شده است. این وسیلهٔ نقلیه از نظر میزان عدم ارائهٔ خسارت در بین سواری‌ها در مقام دوم قرار دارد.

جدول ۲. توزیع تعداد اعلام خسارت‌ها برای اتومبیل سواری نوع ۲

تعداد خسارت‌های اعلام شده (k)	فراوانی (تعداد بیمه‌نامه با k ادعای خسارت)	درصد فراوانی	درصد فراوانی تجمعی
۰	۵۱۴۷۹	۹۰/۲۵	۹۰/۲۵
۱	۵۲۷۵	۹/۲۵	۹۹/۵۰
۲	۲۷۰	۰/۴۷	۹۹/۹۷
۳	۱۰	۰/۰۲	۹۹/۹۹
۴ و بیشتر	۷	۰/۰۱	۱۰۰

منبع: یافته‌های محققان

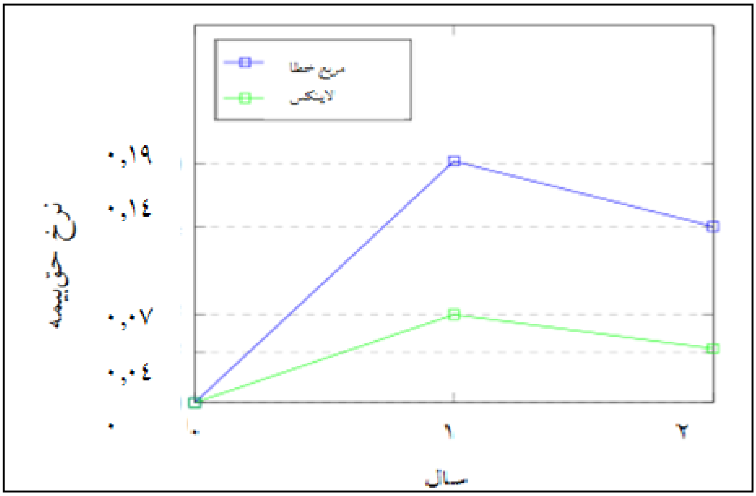


نمودار ۵. فراوانی خسارت اتومبیل سواری نوع ۲

با استفاده از داده‌ها، پارامترهای مدل برای این وسیلهٔ نقلیه به نمودار زیر برآورد می‌شود:

$$a = 0.5, \quad \omega_1 = 0.1, \quad \omega_2 = 0.01, \quad \beta = 8, \quad \tau = 0.0007$$

در نمودار ۶ نرخ حق‌بیمهٔ نسبی محاسبه‌شده تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای این وسیلهٔ نقلیه نشان داده شده است. چنان‌که مشخص است، برآوردگر حق‌بیمهٔ نسبی با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در صفر و یک تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق‌بیمهٔ نسبی محاسبه‌شده تحت تابع زیان مربع خطاست.



نمودار ۶. نرخ حق‌بیمهٔ نسبی تحت مدل پواسون آماسیده در صفر و یک برای سواری نوع ۲

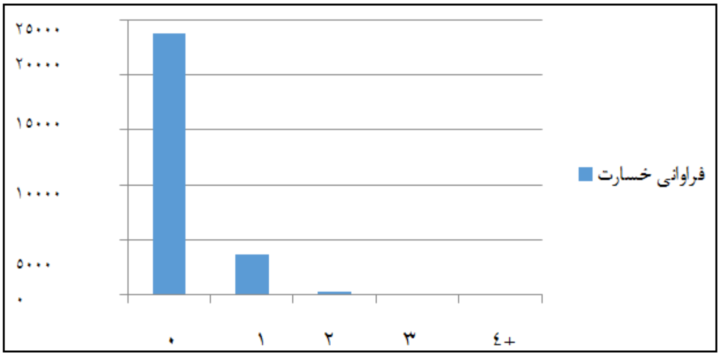
اتومبیل سواری نوع ۳ (۴ سیلندر به بالا):

با توجه به اطلاعات ارائه‌شده در جدول ۳ و نمودار ۷، بدترین گروه از لحاظ تعداد خسارت، در بین سواری‌ها را می‌توان اتومبیل‌های سواری نوع ۳ (۴ سیلندر به بالا) دانست. میزان تقریبی ۱۵درصد اعلام حداقل یک خسارت، این گروه را به پرحادثه‌ترین گروه تبدیل کرده است.

جدول ۳. توزیع تعداد اعلام خسارت‌ها برای اتومبیل سواری نوع ۳

تعداد خسارت‌های اعلام شده (k)	فراوانی (تعداد بیمه‌نامه با k ادعای خسارت)	درصد فراوانی	درصد فراوانی تجمعی
۰	۲۳۷۳۰	۸۵/۷۰	۸۵/۷۰
۱	۳۶۵۵	۱۳/۲۰	۹۸/۹۰
۲	۲۸۰	۱/۰۱	۹۹/۹۱
۳	۱۹	۰/۰۷	۹۹/۹۸
۴ و بیشتر	۵	۰/۰۲	۱۰۰

منبع: یافته‌های محققان

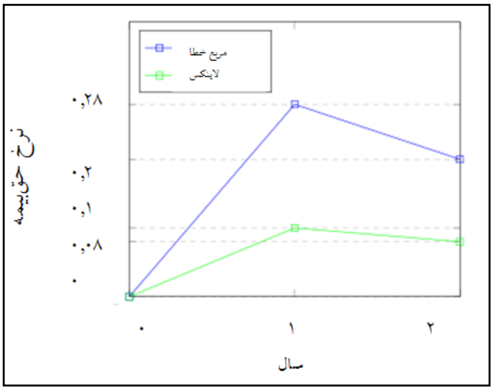


نمودار ۷. فراوانی خسارت اتومبیل سواری نوع ۳

با استفاده از داده‌ها، پارامترهای مدل برای این وسیلهٔ نقلیه به‌این‌صورت برآورد می‌شود:

$$a = 0.5, \qquad \omega_1 = 0.1, \qquad \omega_2 = 0.01, \qquad \beta = 5, \qquad \tau = 0.01$$

در نمودار ۸ حق‌بیمهٔ نسبی محاسبه‌شده تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای این وسیلهٔ نقلیه نشان داده شده است. این نمودار نیز نشان می‌دهد برآوردگر حق‌بیمهٔ نسبی با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در صفر و یک تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق‌بیمهٔ نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست.



نمودار ۸. نرخ حق‌بیمهٔ نسبی تحت مدل پواسون آماسیده
در صفر و یک برای سواری نوع ۳

۵. جمع‌بندی و پیشنهادها

در یک سیستم نرخ‌گذاری‌شده از سوابق بیمه‌ای یک بیمه‌گذار برای محاسبهٔ حق‌بیمهٔ عادلانه استفاده می‌شود. مقدار حق‌بیمهٔ پرداختی توسط بیمه‌گذار، به عوامل نرخ‌گذاری دورهٔ جاری و علاوه بر آن، به سابقهٔ خسارتی او بستگی دارد. هر چه بیمه‌گذاران در طی یک‌سال تعداد بیشتری ادعای خسارت داشته باشند باید حق‌بیمهٔ بیشتری بپردازند و در مقابل به بیمه‌گذارانی که هیچ ادعای خسارتی ندارند

تخفیف تعلق می‌گیرد. بسیاری از بیمه‌گذاران جهت جلوگیری از افزایش حق‌بیمه، سعی می‌کنند خسارت‌های کوچک را به شرکت بیمه گزارش نکنند. مسئله‌ای که در این مقاله مورد تحقیق قرار گرفته مدل‌سازی اشتیاق بیمه‌گذاران برای دریافت تخفیف برمبنای عدم گزارش خسارت‌های کوچک است.

در سیستم نرخ‌گذاری‌شده سابقهٔ t سال قبل افراد حائز اهمیت است و حق‌بیمهٔ نسبی آن‌ها براساس تعداد خسارت‌ها در t سال قبل به‌دست می‌آید. به‌عبارت‌دیگر، حق‌بیمهٔ نسبی ضریبی از حق‌بیمه است که براساس فراوانی خسارت‌های ادعاشده محاسبه می‌شود و حق‌بیمهٔ پایه براساس شدت خسارت‌های وارده. در یک سیستم نرخ‌گذاری‌شده، حق‌بیمه از ضرب حق‌بیمهٔ نسبی در حق‌بیمهٔ پایه به‌دست می‌آید. در این سیستم، طبقه‌ای برای قرارگرفتن افراد برحسب سابقهٔ خسارت وجود ندارد، درحالی‌که در سیستم پاداش–جریمهٔ کلاسیک، ابتدا طبقاتی را می‌سازند و افراد را بر حسب سابقهٔ خسارتشان در طبقات قرار می‌دهند و سپس با قانون انتقال و سابقهٔ سال قبل افراد، آن‌ها را در طبقات جابه‌جا می‌کنند.

با توجه به اینکه برآوردگر باورمندی دقیق برای توزیع‌های پواسون- گامای آماسیده برقرار نیست، در این مقاله، برآوردگر باورمندی خطی با استفاده از ایدهٔ ارائه‌شده توسط پاینده (۲۰۱۰) و به‌وسیلهٔ برآوردگرهای بیز تقریب زده شد.

نتایج مقالهٔ حاضر نشان داد:

۱. اگر پدیدهٔ تمایل به پاداش مشتریان را با استفاده از مدل‌های پواسون آماسیده مدل‌بندی کنیم، نرخ حق‌بیمهٔ نسبی کاهش چشم‌گیری پیدا می‌کند.

۲. برآوردگر حق‌بیمهٔ نسبی تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق‌بیمهٔ نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست.

همان‌گونه که می‌دانیم، در قانون انتقال سیستم پاداش–جریمه، تعداد خسارت‌های ادعاشده در سال قبل نقش مهمی ایفا می‌کند؛ بنابراین در این سیستم از متغیر رفتار ادعاهای خسارت گذشته برای تصحیح حق‌بیمهٔ آینده استفاده می‌شود. ایراد سیستم پاداش ـ جریمه این است که حق‌بیمه‌های پرداخت‌شده توسط بیمه‌گذاران بسیار متغیر است. با توجه به اینکه سیستم پاداش‌ـ جریمه مبتنی بر تعداد خسارت‌هاست نمی‌تواند یک سیستم عادلانه باشد. بنابراین توصیه می‌شود از سیستمی استفاده شود که هر دو عامل تعداد و شدت خسارت‌ها را در محاسبات دخیل کند. همان‌گونه که می‌دانیم شدت خسارت‌های واقع‌شده متغیر است ولی اثر این شدت در محاسبات مربوط به سیستم پاداش- جریمه لحاظ نشده است. بنابراین بیمه‌گذاری که سه خسارت جزئی دارد باید حق‌بیمهٔ بیشتری نسبت به بیمه‌گذاری که یک خسارت بزرگ مرتکب شده است بپردازد، درحالی‌که ممکن است مبلغ یک خسارت بزرگ ده برابر سه خسارت جزئی باشد و این امر منصفانه نیست.

منابع

- Bermudez, L., Denuit, M., & Dhaene, J. (2001). Exponential bonus-malus systems integrating a priori risk classification. Journal of Actuarial Practice, 9(53), 84-112.
- Boucher, J.P. & Denuit M. (2008). Credibility premiums for the zero-inflated Poisson model and new hunger for bonus interpretation. Insurance: Mathematics and Economics, 42(2), 727-735.
- Denuit, M., & Dhaene, J. (2001). Bonus-Malus scales using exponential loss functions. Blätter der DGVFM, 25(1), 13-27.
- Lange, J. T. (1969). Application of a mathematical concept of risk to property-liability insurance ratemaking. Journal of Risk and Insurance, 36(4): 383-391.
- Morillo, I., & Bermúdez, L. (2003). Bonus–malus system using an exponential loss function with an Inverse Gaussian distribution. Insurance: Mathematics and Economics, 33(1), 49-57.
- Payandeh Najafabadi, A.T. (2010). A new approach to the credibility formula. Insurance: Mathematics and Economics, 46(2), 334-338.
- Payandeh Najafabadi, A.T., Atatalab, F., & Omidi Najafabadi, M. , (2017). Credibility premium for rate-making systems. Communications in Statistics-Theory and Methods, 46(1), 415-426.
- Payandeh Najafabadi, A.T. & MohammadPour, S. (2017). A k-Inflated Negative binomial mixture regression model: Application to rate–making systems. Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance, 12(2), 1-31.
- Razie, F., Bahrami Samani, E., & Ganjali, M. (2016). A latent variable model for analyzing mixed longitudinal (k,l)-inflated count and ordinal responses. Journal of Applied Statistics, 43(12), 2203-2224.

- Calculation of the relative premium Based on two-point inflated Poisson model for rate-making system

- Payandeh NajafAbadi, Amir Teimour1 (corresponding Author), Fatemeh Atatalab2, Ramezan Rezazadeh3.

1. Full Professor at Department of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, G.C. Evin, Tehran, Iran
2. PhD student in actuarial science, Shahid Beheshti University
3. Master of actuarial science, Shahid Beheshti University