پژوهشنامهٔ بیمه/ سال بیست‌ونهم/ شماره ۲/ تابستان۱۳۹۳/ شماره مسلسل ۱۱۴/ صفحات ۱۹ تا ۳۶

باورمندی بیزی و بولمان در توزیع‌های آمیخته

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۹/۱۳

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۰۳/۱۲

سامان ابراهیم‌پور[۱]

امین حسن‌زاده[۲]

چکیده

نظریه باورمندی، ابزاری آماری برای محاسبه حق‌بیمه دوره بعد بر اساس تجربیات گذشته بیمه‌شده است. هر قرارداد با یک پارامتر ریسک مشخص می‌شود. در این مقاله برای هر بیمه‌شده یک پارامتر ریسک درنظرمی‌گیریم و با استفاده از توزیع‌های آمیخته نامتناهی، یک مدل برای محاسبه حق‌بیمه باورمندی و بیزی، بر اساس فراوانی و شدت خسارت‌ها به صورت توأم، بررسی می‌شود. توزیع مجموع شدت خسارت‌ها بر اساس فراوانی، یک توزیع آمیخته نامتناهی خواهد بود. در نهایت با درنظرگرفتن توزیع پیشین گاما برای پارامتر ریسک، حق‌بیمه باورمندی و بیزی محاسبه می‌شود.

واژگان کلیدی: *حق‌بیمه، نظریه باورمندی، حق‌بیمه باورمندی، حق‌بیمه بیزی، توزیع‌های آمیخته نامتناهی*

---

۱. کارشناس‌ارشد آمار بیمه، دانشگاه شهید بهشتی(نویسنده مسئول) saman_ebr@hotmail.com

۲. استادیار دانشگاه شهید بهشتی am_hassanzadeh@sbu.ac.ir

۱. مقدمه

نظریه باورمندی از روش‌های کارآمد نرخ‌گذاری برای جوامع ناهمگن است، به خصوص در جوامعی که تعداد طبقات زیاد است و نمی‌توان آنها را با هم ادغام کرد. با استفاده از نظریه باورمندی در مواقعی که برای یک مخاطره خاص، اطلاعات کمی وجود دارد، می‌توان از اطلاعات مشابه دیگری به‌عنوان اطلاعات جانبی استفاده کرد.

این روش سابقه طولانی در علم آکچوئری دارد که اساس آن را موبری[1] در سال ۱۹۱۴ بنا نهاده است. در سال ۱۹۱۸ ویتنی[2] شکل جالبی از میانگین وزنی متوسط خسارت‌های وارده به یک دسته و سایر دسته‌ها را به منظور پیش‌بینی خسارت‌های وارده در سال‌های آتی ارائه داد. در سال ۱۹۶۷ میلادی بولمان[3]، اساسی شامل اثرات غیرقابل مشاهده به‌عنوان ویژگی تمام مخاطره‌ها ارائه داد. بولمان این اثر را، اثر ساختاری نامیده است. بیلی[4] در سال‌های ۱۹۴۵ تا ۱۹۵۰، رابطه نظریه باورمندی و روش بیزی را نشان داد.

فرض کنید که X_1، ...، X_n شدت (تعداد) خسارت‌های یک فرد بیمه‌شده در n دوره گذشته باشد. شرکت بیمه معمولاً یک نرخ بیمه‌ای μ برای کل داشتمان برآورد کرده است، باورمندی یک دستورالعمل برای ترکیب داده‌های گذشته و μ است. براساس این دیدگاه به باورمندی، یک برآوردگر سازگار P_C بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P_C = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu$$

- $\bar{X}$: میانگین مشاهدات گذشته (برای مثال داده‌ها)؛
- μ: میانگین پیشین (برای مثال یک برآورد براساس اطلاعات پیشین)؛

1. Mowbray
2. Whitney
3. Buhlmann
4. Bailey

- $0 < Z < 1$ ،Z: عامل باورمندی.

چند رویکرد برای محاسبه Z وجود دارد:

- **مدل باورمندی کلاسیک**[1]**:** که به آن باورمندی محدودکردن نوسانات نیز گفته می‌شود، این رویکرد از نظریه باورمندی، اولین قدم برای حل مسئله باورمندی است.

فرض کنید که X_j خسارت‌های مربوط به یک فرد برای دوره jام باشد $j = 1, \dots, n$، همچنین فرض کنید که $E[X_j] = \varepsilon$، مقدار حق‌بیمه‌ای که باید پرداخته شود و $Var(X_j) = \sigma^2$ باشد. اطلاعات گذشته را می‌توان به این صورت خلاصه کرد:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

می‌دانیم که $E[\bar{X}] = \varepsilon$ و اگر X_jها مستقل باشند $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ است.

هدف بیمه‌گر محاسبه مقدار ε است. یک راه‌حل می‌تواند این باشد که اطلاعات گذشته را نادیده بگیریم و فقط از M استفاده کنیم که M از اطلاعات گذشته مشابه (برای مثال اطلاعات گذشته گروهی دیگر از بیمه‌گذاران) به‌دست‌آمده و اطلاعات گذشته بیمه‌گذار در محاسبه M تأثیر ندارد، راه دیگر برای به‌دست‌آوردن ε این است که فقط از میانگین خسارت‌های گذشته بیمه‌گذار، $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ با نادیده گرفتن M استفاده کرد که به این حالت باورمندی کامل گفته می‌شود. در باورمندی کامل برای اینکه مقدار واریانس میانگین مشاهدات کم باشد مقدار n باید بزرگ باشد که در عمل بسیار کم اتفاق می‌افتد. یک راه ممکن دیگر می‌تواند این باشد که از ترکیب $\bar{X}$ و M استفاده کنیم، که به این روش باورمندی جزئی گفته می‌شود. یک روش برای ترکیب این دو مقدار، میانگین وزنی است، که مقدار حق‌بیمه را به‌این‌صورت نشان می‌دهد:

$$P_C = Z\bar{X} + (1 - Z)M$$

---

1. Classic Credibility

Z عامل باورمندی است و$0 < Z < 1$ (که باید مشخص شود). روش‌های متفاوتی برای محاسبه Z وجود دارد (برای مثال $Z = 1$ که باورمندی کامل را نتیجه می‌دهد)، در باورمندی جزئی مقدار Z از مینیمم‌کردن $Var(P_C)$ محاسبه می‌شود.

از دیدگاه بیمه‌گر، اگر گذشته بیمه‌گذار پایدار باشد، یعنی واریانس خسارت‌ها کم باشد، منطقی به‌نظرمی‌رسد که از $\bar{X}$ برای پیش‌بینی نتایج دوره بعد استفاده کنیم. همچنین اگر گذشته افراد دارای تغییرپذیری بیشتری باشد بهتر است که برای پیش‌بینی نتایج دوره بعد، کمتر از $\bar{X}$ استفاده کنیم و وزن M بیشتر باشد.

- **باورمندی بولمان[1]:** در این رویکرد فرض می‌شود ریسک هر فرد توسط یک پارامتر ریسک Θ ارائه می‌شود و فرض می‌کنیم که Θ دارای توزیع آماری$\pi(\theta)$ است. در آمار به $\pi(\theta)$ توزیع پیشین و در نظریه باورمندی، تابع ساختاری گفته می‌شود. فرض کنید که شرکت بیمه با توجه به مشاهدات مربوط به خسارت‌های n سال گذشته بیمه‌شده می‌خواهد حق‌بیمه انفرادی را برای سال $(n+1)$ام به‌دست‌آورد، در این نوع حق‌بیمه با توجه به پارامتر ریسک هر فرد Θ، برای هر فرد یک حق‌بیمه خاص به‌دست‌می‌آید. حق‌بیمه انفرادی (خالص) با پارامتر ریسک Θ برابر است با:

$$E[X_{n+1}|\theta] =: \mu(\theta)$$

این نوع حق‌بیمه را حق‌بیمه عادلانه نیز می‌نامند و بهترین حق‌بیمه ممکن است، اما مشکل آنجاست که Θ و به دنبال آن $\mu(\theta)$ نامعلوم است. بنابراین$\mu(\theta)$ یک پارامتر است و باید مقدار آن برآورد شود. در این رویکرد با استفاده از تابع کمترین زیان‌های توان دوم یک برآورد برای $\mu(\theta)$ براساس ترکیب خطی از مشاهدات گذشته ارائه می‌شود.

---

1. Buhlmann Credibility

• مدل باورمندی بولمان

ابتدا فرض‌های مدل را به‌این‌صورت درنظرمی‌گیریم:

▪ متغیرهای تصادفی $X_j, (j = 1, \dots, n)$ به شرط $\Theta = \theta$ از هم مستقل‌اند و دارای توزیع یکسان F_Θ، با این گشتاورها هستند:

$$\mu(\theta) = E\left[X_j \middle| \Theta = \theta\right]$$
$$\sigma^2(\theta) = Var\left[X_j \middle| \Theta = \theta\right]$$

▪ Θ یک متغیر تصادفی با توزیع $\pi(\theta)$ است.

قضیه ۱-۱: برآورد باورمندی تحت فرضیات مدل بالا به‌این‌صورت محاسبه می‌شود[1] (Buhlmann and Gisler, 2005):

$$\widehat{\widehat{\mu(\theta)}} = z\bar{X} + (1 - z)\mu_0$$

که در آن:

$$\mu_0 = E\left[\mu(\theta)\right]$$
$$z = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$$
$$\sigma^2 = E[\sigma^2(\theta)]$$
$$\tau^2 = Var\left(\mu(\theta)\right)$$

- **رویکرد بیزی**[2]: رویکردی است که در آن مشاهدات فعلی با اطلاعات پیشین به منظور به‌دست‌آوردن برآورد بهتری ترکیب می‌شوند. نظریه بیز اساس این رویکرد است. در این رویکرد از $E[\mu(\theta)|x_1, \dots, x_n]$ برای محاسبه حق‌بیمه استفاده می‌شود. دریک‌حالت خاص که برآورد بیزی ترکیب خطی از مشاهدات به‌دست‌می‌آید، حق‌بیمه بیزی و بولمان با هم برابر می‌شوند، به این حالت، باورمندی دقیق گفته می‌شود.

۱. برای مطالعه بیشتر ر.ک: Klugman et al., 2004

2. Bayesian Approach

تاکنون در بیشتر تحقیقات، فراوانی یا شدت خسارت‌ها به صورت مجزا در نظر گرفته شده است. در این مقاله برآورد باورمندی بولمان و بیزی را برای فراوانی و شدت خسارت‌ها به صورت همزمان مورد بررسی قرار می‌دهیم. در یک حالت ساده برای به‌دست‌آوردن برآورد باورمندی با درنظرگرفتن فراوانی و شدت خسارت‌ها، از میانگین شدت خسارت‌ها برای هر فرد استفاده می‌کنیم، به‌این‌صورت که میانگین شدت خسارت‌های گذشته برای هر فرد از تقسیم شدت خسارت کل بر تعداد خسارت‌ها به‌دست‌می‌آید. حالتی که ما در اینجا مورد بررسی قرار می‌دهیم به‌این‌صورت است که خسارت‌های هر فرد را به صورت یک مجموع تصادفی درنظرمی‌گیریم و برآورد باورمندی را دراین‌حالت محاسبه می‌کنیم. توزیع این مجموع تصادفی با توجه به آنچه که در ادامه خواهیم دید یک توزیع آمیخته نامتناهی خواهد بود. مقالات متعددی در زمینه استفاده از نظریه باورمندی در مدل‌های ریسک جمعی وجود دارد (Agata, 2008)، اما آنچه که این مقاله را از سایر منابع متمایز می‌سازد این است که در این مقاله نحوه محاسبه عددی حق‌بیمه بیزی در مدل‌های ریسک جمعی توضیح داده شده است.

۲. برآورد باورمندی در توزیع‌های آمیخته نامتناهی

فرض کنید که $X_1, \dots, X_N$ شدت خسارت‌ها برای یک بیمه‌گذار در یک بازه زمانی مشخص باشد، که N، تعداد خسارت‌ها، به صورت تصادفی از یک توزیع مشخص تعریف می‌شود و در آن: $\mathrm{P(N = l)} = \zeta_l$

برای به‌دست‌آوردن برآورد بیزی و بولمان دراین‌حالت از متغیر $Y = \sum_{l=1}^{N} X_l$ استفاده می‌کنیم، Y یک مجموع تصادفی است که کل خسارت‌های یک بیمه‌شده را نشان می‌دهد و توزیع آن به صورت یک توزیع آمیخته نامتناهی خواهد بود. Y یک مدل ریسک جمعی است که برای $N = 1,2, \dots$ به صورت $Y = \sum_{l=1}^{N} X_l$ تعریف می‌شود و $N = 0$ و $Y = 0$ است. در یک مدل ریسک جمعی، این فرض‌ها را داریم:

- X_N، ...، X_1 تحت شرط $N = n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند؛
- توزیع متغیرهای تصادفی X_1، ...، X_N تحت شرط $N = n$، به n بستگی ندارد؛
- توزیع N به مقادیر X_1،X_2، ... بستگی ندارد.

درحالت‌کلی از Θ به عنوان پارامتر ریسک یک فرد استفاده می‌کنیم، در اینجا فرض می‌کنیم که Θ دارای توزیع $\pi(\theta)$ است. همچنین فرض کنید که X_1، ...، X_N به شرط Θ=θ از خانواده توزیع‌های نمایی خطی با پارامتر θ، به‌این‌صورت باشد:

$$f(x|\theta) = \frac{p(x)e^{r(\theta)x}}{q(\theta)} \text{ , } \theta>0 \text{ , } x>0$$

مجموع خسارت‌ها دراین‌حالت به‌این‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y = X_1 + \cdots + X_N$$

که N نیز یک متغیر تصادفی است به‌طوری‌که $P(N = l) = \zeta_l, l \geq 0$ است. N تعداد خسارت‌ها برای هر فرد را مشخص می‌کند. $Y|\Theta = \theta$ یک متغیر تصادفی مرکب خواهد بود که توزیع آن به‌این‌صورت است:

$$f(Y|\theta) = f_{X_1+\cdots+X_N}(y|\theta)$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} f_{\sum_{i=1}^{N} X_i}\big((y|\theta)\big|N = l\big)P(N = l)$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} f_{\sum_{i=1}^{l} X_i}(y|\theta)P(N = l)$$

با توجه به اینکه $\sum_{l=0}^{\infty} P(N = l) = 1$ توزیع $Y|\theta$ یک توزیع آمیخته نامتناهی است. حال برای به‌دست‌آوردن برآورد باورمندی در مدل بولمان فرضیات مدل را به این‌صورت درنظرمی‌گیریم:

- فرضیات مدل

آنچه که در بالا گفته شد برای یک دوره بیمه‌گذار بود، حال فرض کنید که این شرایط برای t دوره برقرار باشد(T، ...، $t = 1$) و $X_{t1}, \ldots, X_{tN_t}|\Theta = \theta$ دارای توزیعی از خانواده توزیع‌های نمایی خطی باشد و Y_t یک متغیر تصادفی به این صورت است:

$$Y_t = X_{t1} + \cdots + X_{tN_t} \qquad\qquad t = 1, \dots, T$$

- برآورد باورمندی

قضیه ۱-۲. تحت فرضیات مدل بالا برآورد باورمندی در مدل بولمان به‌این‌صورت خواهد بود:

$$\hat{\mu} = z\bar{y} + (1 - z)\mu_0$$

که:

$$z = \frac{T}{T + k}$$

$$k = \frac{E[Var(Y_1|\theta)]}{Var(E[Y_1|\theta])}$$

$$\mu(\theta) = E[Y_1|\theta] = E[X_{11}|\theta]E[N]$$

$$\mu_0 = E[\mu(\theta)]$$

در ادامه فرض کنید که $X_{t1}, \dots, X_{tN_t}|\Theta = \theta \sim \exp(\theta)$، برای به‌دست‌آوردن برآورد باورمندی باید k را محاسبه کنیم، ابتدا $E[Var(Y_1|\theta)]$ را به‌این‌صورت محاسبه می‌کنیم:

$$E[Var(Y_1|\theta)] = E\left[Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_{i1}\middle|\theta\right)\right]$$

$$= E\{E\left[Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_{i1}\middle|\theta\right)\middle|N\right] + Var(E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_{i1}\middle|\theta\right)\middle|N\right]\}$$

$$= \big(E[N] + Var(N)\big)E\left[\frac{1}{\Theta^2}\right]$$

حال $VarE[(Y_1|\theta)]$ را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$VarE[(Y_1|\theta)] = Var\big(\mu(\theta)\big) = E^2[N]Var\left(\frac{1}{\Theta}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{Var(N) + E[N]}{E^2[N]} \times \frac{E[\Theta^{-2}]}{E[\Theta^{-2}] - E^2[\Theta^{-1}]}$$

اگر Θ دارای توزیع گاما به‌این‌صورت باشد:

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{\beta\theta} \qquad\qquad \theta > 0$$

پس داریم:

$$E[\Theta^{-2}] = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\ , \qquad E[\Theta^{-1}] = \frac{\beta}{(\alpha-1)}$$

در نتیجه برآورد حق‌بیمه باورمندی P_c، به‌این‌صورت به‌دست‌می‌آید:

$$P_c = \frac{T}{T+k}\bar{y} + \frac{\beta}{T+k}\frac{E[N]+Var(N)}{E[N]}$$

۳. برآورد حق‌بیمه بیزی در توزیع‌های آمیخته نامتناهی

درحالت‌کلی، اگر Y_1،$Y_T, \dots$،Y_{T+1} به شرط Θ=θ مستقل باشد، حق‌بیمه بیزی به‌این‌صورت تعریف می‌شود (Klugman et al., 2004)

$$E[\mu(\theta)|y_1,\dots,y_T] = E[Y_{T+1}|y_1,\dots,y_T]$$
$$= \int_0^\infty E[Y_{T+1}|\Theta=\theta]\,\pi(\theta|y_1,\dots,y_T)d\theta$$

که $\pi(\theta|y_1,\dots,y_T)$ چگالی پسین Θ بـه شـرط $Y_1 = y_1$، ...،$Y_T = y_T$ اسـت.

برای محاسبه توزیع پسین ابتدا باید توزیع توأم Y_1، ...،Y_T به شرط Θ=θ را محاسبه کنید. در ادامه می‌خواهیم $f(y_1,\dots,y_T|\theta)$ را محاسبه کنیم، بدین منظور ابتدا قضیه زیر بیان می‌شود:

قضیه ۱-۳: فرض کنید که X_1، ...،X_N مستقل و هم‌توزیع از خانواده توزیع‌های نمایی خطی با پارامتر θ باشد. همچنین فرض کنید $Y = X_1 + \dots + X_N$، که N نیز یک متغیر تصادفی است. دراین‌صورت تابع چگالی احتمال Y به‌این‌صورت است:

$$f_Y(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{yr(\theta)}}{q^{l+1}(\theta)} p^*(y)\zeta_{l+1}$$

برهان. با فرض $N = l$ ابتـدا چگـالی $T(x) = X_1 + \dots + X_l$ بـه‌ایـن‌صـورت محاسبه می‌شود:

$$f_T(t) = \int_{x_1} \dots \int_{x_{l-1}} f(x_1)\dots f(x_{l-1}) f\left(t - \sum_{i=1}^{l-1} x_i\right) dx_1 \dots dx_{l-1}$$

$$= \frac{e^{tr(\theta)}}{q^{l}(\theta)} \underbrace{\int_{x_1} \dots \int_{x_{l-1}} p(x_1) \dots p(x_{l-1}) p\left(t - \sum_{i=1}^{l-1} x_i\right) dx_1 \dots dx_{l-1}}_{p^*(t)}$$

پس توزیع مجموع X_iها نیز از خانواده توزیع‌های نمایی خطی است. در نتیجه چگالی Y به‌این‌صورت است:

$$f_Y(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{yr(\theta)}}{q^{l+1}(\theta)} p^*(y) \zeta_{l+1}$$

از قضیه زیر برای محاسبه تابع چگالی احتمال توأم استفاده شده است.

قضیه ۲-۳: فرض کنید که $Y_1, \dots, Y_T$ به شرط θ هم‌توزیع و مستقل با تابع چگالی بالا باشد. دراین‌صورت $f_Y(y_1, \dots, y_T|\theta)$ به‌این‌صورت به‌دست‌می‌آید:

$$f_Y(y_1, \dots, y_T|\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{\sum_{t=1}^{T} y_t r(\theta)}}{q^{m+T}(\theta)} D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta)$$

که در رابطه بالا:

$$P(N = l) = \zeta_l$$

$$D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta) = \sum_{z=0}^{m} p_{z+1}^*(y_t)\, \zeta_{z+1} D(m - z, y_1, \dots, y_{T-1}, \zeta)$$

و ستون اول ماتریس D برابر است با:

$$D(m, y_1, \zeta) = \zeta_{m+1} p_{m+1}^*(y_1)\ , m = 0,1, \dots$$

برهان: برای اثبات رابطه بالا از استقرا استفاده می‌کنیم، ابتدا فرض کنید که $T = 2$ دراین‌صورت:

$$f(y_1, y_2|\theta) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{e^{y_1 r(\theta)}}{q^{m_1+1}(\theta)} p_{m_1+1}^*(y_1) \zeta_{m_1+1} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{e^{y_2 r(\theta)}}{q^{m_2+1}(\theta)} p_{m_2+1}^*(y_2) \zeta_{m_2+1}$$

که با قراردادن $m_1 + m_2 = m$ و $z = m_2$ این رابطه به‌دست‌می‌آید:

$$f(y_1, y_2|\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{r(\theta)(y_1+y_2)}}{q^{m+2}(\theta)} D(m, y_1, y_2, \zeta)$$

اکنون اگر فرض کنیم رابطه بالا برای $T = k$ درست باشد، رابطه را برای وقتی که $T = k + 1$ است، اثبات می‌کنیم:

$$f_Y(y_1,\dots,y_k,y_{k+1}|\theta)=f_Y(y_1,\dots,y_k|\theta)f(y_{k+1}|\theta)$$
$$=\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{e^{\sum_{t=1}^{k}y_t r(\theta)}}{q^{m_1+k}(\theta)}D(m_1,y_1,\dots,y_k,\zeta)\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{e^{y_2 r(\theta)}}{q^{m_2+1}(\theta)}p^*_{m_2+1}(y_2)\zeta_{m_2+1}$$

که با قراردادن $m=m_1+m_2$ و $z=m_2$ این‌رابطه به‌دست‌می‌آید:

$$f_Y(y_1,\dots,y_k,y_{k+1}|\theta)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{e^{\sum_{t=1}^{k+1}y_t r(\theta)}}{q^{m_1+k+1}(\theta)}D(m_1,y_1,\dots,y_{k+1},\zeta)$$

- حق‌بیمه بیزی

حق‌بیمه بیزی برابر است با:

$$E[\mu(\theta)|y_1,\dots,y_T]$$

به‌طوری‌که:

$$\mu(\theta)=E[Y_{t+1}|\Theta]$$
$$=E\left[\sum_{i=1}^{N}X_{i(t+1)}\right]=E[N]E[X_{t+1}]$$
$$=\frac{q'(\Theta)}{r'(\Theta)q(\Theta)}E[N]$$

در نتیجه حق‌بیمه بیزی برابر می‌شود با:

$$E[\mu(\theta)|y_1,\dots,y_T]=E[\frac{q'(\Theta)}{r'(\Theta)q(\Theta)}|y_1,\dots,y_T]E[N]$$

که برای محاسبه رابطه بالا باید توزیع پسینی را محاسبه کنیم. برای محاسبه توزیع پسینی فرض کنید توزیع Θ به‌این‌صورت است:

$$\pi(\theta)=\frac{[q(\theta)]^{-k}e^{\mu k r(\theta)}r'(\theta)}{c(\mu,k)},\theta>0\ \mu,k>0$$

در ادامه توزیع پسینی را با استفاده از این رابطه محاسبه می‌کنیم:

$$\pi(\theta|y_1,\dots,y_T)=\frac{f(y_1,\dots,y_T|\theta)\pi(\theta)}{\int_0^{\infty}f(y_1,\dots,y_T|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

که با جایگذاری و ساده‌کردن روابط داریم:

$$\pi(\theta|y_1,\dots,y_T)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{\mu^*k^*r(\theta)}}{[q(\theta)]^{k^*}}\frac{D(m,y_1,\dots,y_T,\zeta)}{d(\mu^*,k^*,y_1,\dots,y_T,\zeta)}$$

به‌طوری‌که:

$$\mu^* = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t + k\mu}{k+m+T}$$
$$K^* = k+m+T$$
$$d(\mu^*, k^*, y_1, \dots, y_T, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} c(\mu^*, k^*) D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta)$$

حال بـه عنـوان مثـالی از حالـت کلـی فـرض کنیـد کـه $X_{it}(i = 1, \dots, N\ , t = 1, \dots, T)$ به‌شرط θ=Θدارای توزی نمایی با پارامتر θ است. دراین‌صورت:

$$f_Y(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-y\theta}}{(\frac{1}{\theta})^{m+1}} \frac{y^{m-1}}{\Gamma(m)} \zeta_{m+1}$$

و داریم:

$$r(\theta) = -\theta$$
$$q(\theta) = \frac{1}{\theta}$$
$$p_m^* = \frac{y^{m-1}}{\Gamma(m)}$$

بنابراین توزیع پسینی به‌این‌صورت به‌دست‌می‌آید:

$$\pi(\theta | y_1, \dots, y_T) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\mu^* k^* \theta} \theta^{k^*} \frac{D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta)}{d(\mu^*, k^*, y_1, \dots, y_T, \zeta)}$$

که:

$$d(\mu^*, k^*, y_1, \dots, y_T, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} c(\mu^*, k^*) D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta)$$
$$c(\mu^*, k^*) = \frac{\Gamma(k^* + 1)}{(\mu^* k^*)^{k^*+1}}$$

پس دراین‌حالت حق‌بیمه بیزی به‌این‌صورت محاسبه می‌شود:

$$E[\mu(\theta) | y_1, \dots, y_T] = E[\frac{q'(\Theta)}{r'(\Theta) q(\Theta)} | y_1, \dots, y_T] E[N]$$
$$= E\left[\frac{1}{\Theta} \middle| y_1, \dots, y_T\right] = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k^*)}{(\mu^* k^*)^{k^*}} D(m, y_1, \dots, y_T, \zeta)}{d(\mu^*, k^*, y_1, \dots, y_T, \zeta)}$$

۴. چگالی حاشیه‌ای Y

فرض کنید که:

$$Y=\begin{cases}X_1+\cdots+X_N\ , & N>0\\ 0\ , & N=0\end{cases}$$

که X_iها به شرط Θ=θ دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است، پس Y به شرط Θ=θ و $N=n$ دارای تابع چگالی گاما با پارامترهای (N,Θ) است و چگالی حاشیه‌ای Y به‌این‌صورت تعیین می‌شود:

$$f(y)=\sum_{n=1}^{\infty} f(y|N=n)P(N=n)$$

که $f(y|N=n)$ از این رابطه تعیین می‌شود:

$$f(y|N=n)=\int_0^{\infty} f(y|N=n,\Theta=\theta)\pi(\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{\alpha}y^{n-1}}{\beta(\alpha,n)(y+\beta)^{n+\alpha}}P(N=n)$$

که:

$$\beta(\alpha,n)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+n)}$$

اگر فرض کنیم N دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است، دراین‌صورت چگالی حاشیه‌ای Y برابر است با:

$$\Rightarrow f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{\alpha}y^{n-1}}{\beta(\alpha,n)(y+\beta)^{n+\alpha}}\frac{\lambda^{n}e^{-\lambda}}{n!}$$

که یک توزیع آمیخته نامتناهی از پارتوی تعمیم‌یافته است (Klugman et al., 2004).

۵. کاربرد

مثال ۱: فرض کنید که پارامترهای توزیع پیشین گاما $\alpha=5$ و $\beta=10$ باشند، بنابراین میانگین پارامتر ریسک ۰/۵ و واریانس ۰/۰۵ است. همچنین فرض کنید که تعداد خسارت‌ها برای هر فرد دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda=5$ است، امید غیرشرطی خسارت‌ها این‌گونه به‌دست‌می‌آید:

$E[N]E[1/\Theta]=E[N]\beta/(\alpha-1)$

برای مقایسه حق‌بیمه بیزی و باورمندی از توزیع گاما بـا پارامترهـای θ و N، ۵ مشاهده به‌صورت تصادفی تولید کرده‌ایم، که این ۵ مشاهده، مربوط به یک ریسـک مشخص در طی دوره‌های قبل است. این روند برای ۱۰۰ ریسـک متفـاوت تکـرار شده است و حق‌بیمه بیزی و بولمان به‌صورت نمودار ۱، به‌دست‌می‌آیـد. همچنـین در جدول ۱، متوسط حق‌بیمه‌ها آورده شده است. به‌صورت متوسط حق‌بیمه بیـزی از حق‌بیمه بولمان کمتر شده است. همچنین با استفاده از این فرمول، مقـادیر MSE نیز محاسبه شده و متوسط این مقادیر در جدول آورده شده است:

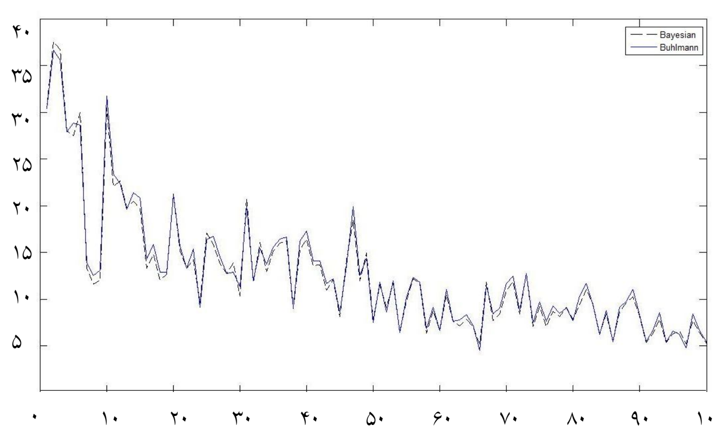
$$MSE_b=\left(P_b-E[N]\theta^{-1}\right)^2$$
$$MSE_{cr}=\left(P_{cr}-E[N]\theta^{-1}\right)^2$$

جدول ۱. حق‌بیمه بیزی و بولمان در مثال ۱

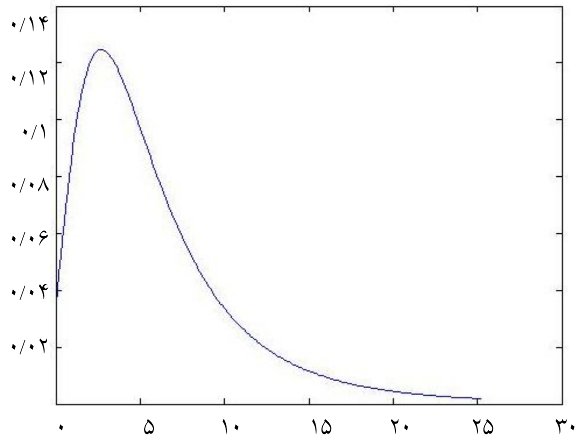
P_{cr}	MSE_{cr}	P_b	MSE_b
۱۲/۹۲۰۵	۱۴/۴۲۶۹	۱۲/۶۴۹۷	۱۴/۹۵۹۴

در جـدول ۱، مقـدار Θ از توزیـع گامـا بـا پارامترهـای $\alpha=5$ و $\beta=10$ به‌دست‌آمده‌است. نمودار ۱ مقادیر حق‌بیمه را نشـان مـی‌دهـد (نمـودار خـط‌چـین مربوط به حق‌بیمه بیزی و نمودار خط مربوط به حق‌بیمه بولمان است.)

نمودار ۱. مقایسه حق‌بیمه بیزی و بولمان برای مثال ۱



نمودار ۲. چگالی حاشیه‌ای Y برای مثال ۱



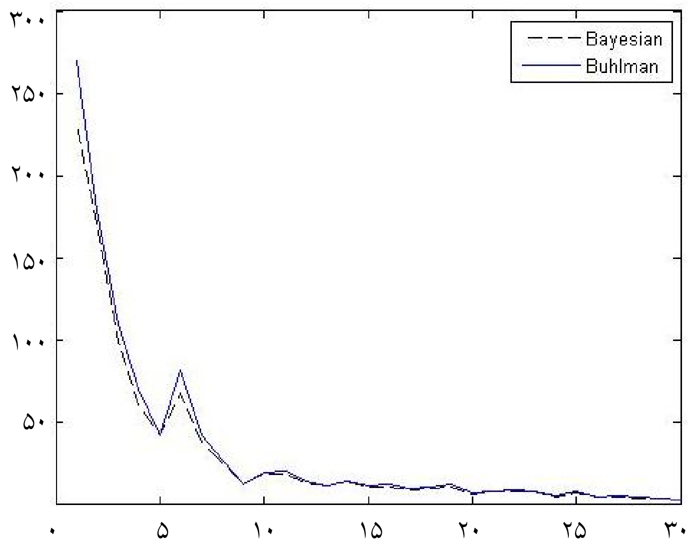
مثال ۲: فرض کنید که Θ دارای توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ (نمایی با میانگین ۰/۵) باشد، همچنین فرض کنید که توزیع خسارت‌ها پواسون با میانگین ۳ باشد. برای پنج دوره گذشته، خسارت‌های مربوط به ۳۰ نفر از توزیع گاما شبیه‌سازی شده و حق‌بیمه بیزی و بولمان محاسبه شده است، خلاصه مقادیر حق‌بیمه در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲. حق‌بیمه بیزی و بولمان در مثال ۲

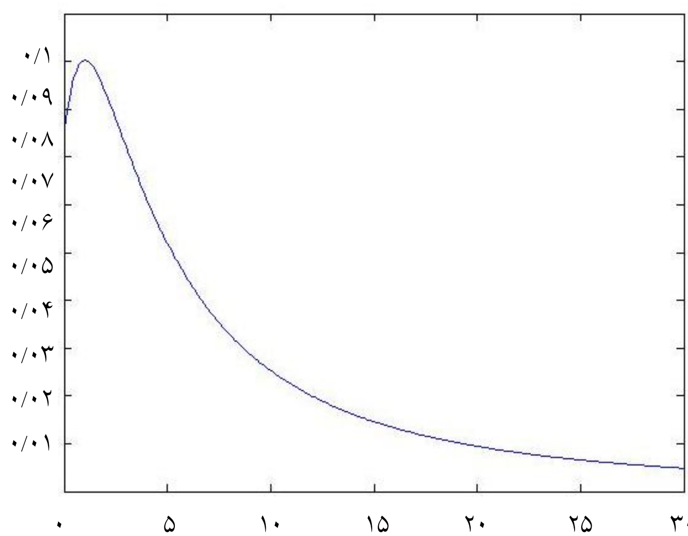
P_{cr}	MSE_{cr}	P_b	MSE_b
۳۴/۰۲	۹۰/۹۵	۳۰/۶۵	۸۰/۹۷

نمودار ۳ حق‌بیمه بیزی و بولمان را برای ۳۰ پارامتر ریسک نشان می‌دهد(نمودار خط‌چین مربوط به حق‌بیمه بیزی و نمودار خط مربوط به حق‌بیمه بولمان است).

نمودار ۳. مقایسه حق‌بیمه بیزی و بولمان برای مثال ۲



نمودار ۴. چگالی حاشیه‌ای Y برای مثال۲



۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله برآوردگرهای باورمندی و بیزی در توزیع‌های آمیخته نامتناهی بررسی شد، توزیع خسارت‌ها به شرط پارامتر ریسک از خانواده توزیع‌های نمایی خطی درنظرگرفته‌شد و خسارت‌های هر دوره با استفاده از یک متغیر کمکی به صورت یک مجموع تصادفی مدنظر قرار گرفت که توزیع این مجموع تصادفی یک توزیع آمیخته نامتناهی به‌دست‌آمد. در یک حالت خاص توزیع خسارت‌ها به شرط پارامتر ریسک توزیع نمایی درنظرگرفته‌شد و با درنظرگرفتن یک توزیع پیشین مناسب (گاما) برای پارامتر ریسک، تابع چگالی حاشیه‌ای مجموع خسارت‌ها را نیز محاسبه کردیم. در حالتی که توزیع پارامتر ریسک گاما باشد، چگالی حاشیه‌ای مجموع خسارت‌ها یک توزیع آمیخته نامتناهی از پارتوی تعمیم‌یافته به‌دست‌می‌آید که یک توزیع دم‌سنگین است و برای مدل‌بندی‌کردن داده‌های بیمه‌ای بسیار مفید است. در نهایت برای این حالت حق‌بیمه بیزی و بولمان با هم مقایسه شد و مشاهده شد که به‌صورت متوسط مقدار حق‌بیمه بیزی از حق‌بیمه بولمان کمتر به‌دست‌می‌آید. در عمل برای محاسبه حق‌بیمه دوره بعد، شدت خسارت‌ها یا فراوانی خسارت‌ها درنظرگرفته‌می‌شود. در این مقاله با ارائه یک روش جدید این امکان فراهم شد که بتوان فراوانی و شدت خسارت‌ها را به‌طور هم‌زمان برای محاسبه حق‌بیمه دوره بعدی مورد بررسی قرار داد و یک حق‌بیمه عادلانه ارائه کرد.

منابع

1. Agata, B., 2008. Posterior regret gamma-minimax estimation in insurance premium in collective risk models. *Astin Bulletin*, 36, pp. 257-326.
2. Buhlmann, H., 1967. *Experience rating and credibility. ASTIN Bulletin*, 4, pp. 199-207.
3. Buhlmann, H. and Gisler, A., 2005. *A course in credibility theory and its application.* Springer-Verlag.
4. Denuit, M., Marechal, X., Pitrebois, S., and Walhin, J.F., 2007. *Actuarial modelling of claim counts: Risk classification*, *Credibility and Bonus-Malus Systems*, England: Wiley.
5. Hassan Zadeh, A. and Stanford, D., 2011. Bayesian and Buhlmann credibility for phase-type distributions with a univariate risk parameter. *Scandinavian Actuarial Journal.* In press.
6. Kaas, R., Govaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M., 2008. *Modern actuarial risk theory,* New York: Springer.
7. Klugman, S.A., Panjer, H.H. and Willmot, G.E., 2004. *Loss models: From data to decision.* John Wiley & Sons: Hoboken, NJ, 4th ed.
8. Lau, J.W., Siu, T.k and Yang, H., 2006. On Bayesian mixture credibility. *ASTIN Bulletin* 2, pp. 573-88.