

کاربردهای رویکرد مارکوفی در مدل‌بندی مرگ‌ومیر زوجین

تاریخ دریافت: ۹۳/۱۱/۰۶

سفیرا تعجبیان^۱

تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۶/۱۶

امین حسن‌زاده^۲

چکیده

بسیاری از شرکت‌های بیمه در فرضیه استقلال بین طول عمر زوجین ممارست می‌ورزند. برای محصولاتی که سودی مشروط باتوجه به ترکیبی از وضعیت بقای زندگی توأم زوجین پرداخته می‌شود، به مدلی با تأثیرگذاری باقی‌مانده زندگی یکی بر دیگری نیازمندیم و فرضیه استقلال طول عمر زوجین کارآمد نیست؛ استفاده از مدل مذکور، تأثیر اقتصادی چشمگیر بالقوه‌ای بر صنعت بیمه دارد.

در این مقاله، به وسیله دو مدل مارکوف و نیم‌مارکوف، طول عمر آتی وابسته زن و شوهر را مدل‌بندی کرده که از این طریق می‌توان سه نوع وابستگی را اندازه‌گیری کرد: وابستگی لحظه‌ای یعنی تحت تأثیر قرار گرفتن زندگی زوجین به دلیل حوادث ناگهانی؛ دوره‌ای کوتاه‌مدت پس از فوت یکی از زوجین که به شدت زوج باقی‌مانده را تحت تأثیر قرار می‌دهد؛ دوره‌ای بلندمدت که ناشی از میزان تأثیرگذاری سبک زندگی هر یک از زوجین بر دیگری در طول زندگی مشترکشان است.

از آنجاکه یک بانک اطلاعاتی جامع از داده‌های مرگ‌ومیر در ایران وجود ندارد از داده‌های انجمن بیم‌سنج‌ها برای مدل‌بندی مستمری مشترک زوجین و آخرین بازمانده بهره برده‌ایم؛ همچنین تأثیر وابستگی را بر مقادیر مستمری مورد مطالعه قرار داده و در نهایت نادرست بودن فرض استقلال طول عمر زوجین در قیمت‌گذاری مستمری‌ها را نشان داده‌ایم.

واژگان کلیدی: مدل مارکوف، مدل نیم‌مارکوف، زندگی مشترک زوجین، آخرین بازمانده، نیروی مرگ‌ومیر، سانحه مشترک، سندروم قلب شکسته

۱. مقدمه

در بازار کاملاً رقابتی کنونی تمامی شرکت‌های بیمه به دنبال حداکثرکردن داشته‌مان خود از جمله فروش قراردادهای بیشتر به بیمه‌گذاران هستند و این امر با تعیین حق‌بیمه‌های عادلانه که هم در جهت منافع بیمه‌گذار باشد و هم بیمه‌گر میسر خواهد شد. بسیاری از شرکت‌های بیمه بر فرضیه استقلال بین طول عمر زوجین ممارست می‌ورزند. فرضیه غیرواقعی استقلال، تأثیر اقتصادی بالقوه‌ای بر صنعت بیمه دارد. شرکت‌های بیمه برای محصولاتی که مزایا را مشروط به ترکیبی از وضعیت بقای بیمه‌شدگان مشترک می‌پردازند، به مدلی با تأثیرگذاری باقی‌مانده زندگی زوجین بر یکدیگر نیازمند هستند. این موضوع امری مهم و حساس در قیمت‌گذاری و ارزیابی ذخیره محصولات بیمه‌ای است.

چندین مطالعه تجربی در سال‌های اخیر پیرامون وابستگی بین طول عمر زن و شوهر صورت گرفته است. دنویت و همکاران^۱ دریافتند که زوجین در معرض مخاطره‌های مشابه هستند، بنابراین فرض استقلال باقی‌مانده طول عمر زوجین درست نیست. جاگر و ساتن^۲ نیز نشان دادند که یک نوع مخاطره خویشاوندی وقتی یکی از زوجین فوت می‌کند و دیگری داغدار او می‌شود، افزایش پیدا می‌کند و آن را سندروم قلب شکسته^۳ نامیدند. این عامل می‌تواند برای یک دوره زمانی کوتاه‌مدت به طول بیانجامد و باعث افزایش احتمال فوت زوج بازمانده شود. سندروم قلب شکسته برای توجیه افزایش مرگ‌ومیرها بعد از فوت همسر بیان می‌شود، اگرچه علت فوت آنها از یکدیگر مستقل است. این موضوع مقوله‌ای متفاوت با عامل سانحه مشترک^۴ است که بیان می‌کند فوت هم‌زمان، ناشی از یک

-
1. Denuit et al., 2001
 2. Jagger and Sutton, 1991
 3. Broken Heart Syndrome
 4. Common Shock

حادثه مشترک شامل تصادفات مرگبار، سقوط هواپیما، حوادث طبیعی همچون زلزله، سیل و... می‌شود.

در این مقاله نشان داده می‌شود که هر دوی عوامل سانحه مشترک و سندروم قلب شکسته در مجموعه داده‌هایمان بر وابستگی طول عمر زوجین مؤثر هستند. این مورد می‌تواند امری تأثیرگذار بر مدیریت مخاطره قراردادهای مستمری زندگی مشترک زوجین و آخرین بازمانده باشد.

یک راه برای مدل‌بندی وابستگی بین طول عمر زوجین استفاده از مدل‌های وضعیت متناهی مارکوف^۱ است. در اینجا نشان داده می‌شود که مدل‌های مارکوفی در مدل‌بندی زندگی وابسته زوجین، انعطاف‌پذیر، شفاف و به راحتی قابل گسترش هستند. در این مدل شدت انتقال تنها به وضعیت جاری بستگی دارد؛ در حالی که در مدل‌های نیم‌مارکوف^۲ شدت انتقال به وضعیت جاری و مدت زمان طی شده در آخرین وضعیت وابسته است.

از مدل‌های مارکوفی برای مدل‌بندی طول عمر زندگی زوجین به صورت وابسته به عنوان جانشینی برای روش‌های دیگر بهره برده‌ایم. برای بیان وابستگی لحظه‌ای بین طول عمر زوجین در مدل مارکوف از عامل سانحه مشترک استفاده کرده‌ایم. تأثیر عامل قلب شکسته روی نیروی مرگ‌ومیر بیوه‌شدگان ناشی از ضربه فوت از دست دادن همسر با استفاده از خاصیت نیم‌مارکوف اعمال می‌شود و تأثیر این ضربه با گذشت زمان کمتر می‌شود. هدف در مدل مرگ‌ومیر نیم‌مارکوف تعریف تابع نمایی نزولی با بهره‌گیری از تأثیر عامل داغدیدگی بر نیروی مرگ‌ومیر زوج باقی مانده است.

مدل‌های مارکوف چند وضعیتی در موارد گوناگون در دانش بیم‌سنجی کاربرد دارند. سوردراپ^۱ و واترز^۲ از مدل‌هایی استفاده کردند که شامل چندین وضعیت متفاوت سلامتی می‌شد. اولین عملکرد مدل‌بندی مرگ‌ومیر زندگی زوجین توسط نوربرگ^۳ صورت گرفت. اسپریو و وانگ^۴ و دیکسون و همکارانش^۵ توضیح دادند که چگونه مدل‌های وضعیت متناهی مارکوف می‌توانند برای مدل‌بندی بیمه‌های سودده گوناگون استفاده شوند.

در اینجا برای محاسبه نیروی مرگ‌ومیر فوت در اثر سانحه مشترک از قانون گامپرتز^۶ $\mu_x = BC^x$ استفاده می‌شود. این مدل به دلیل داشتن حداقل پارامترها مورد استفاده است چون این اجازه را می‌دهد که نیروی مرگ‌ومیر بی‌نهایت نقطه (سن) را برون‌یابی کنیم. به این صورت نتیجه واضح نشان داده می‌شود و ما قادریم کمیت‌هایی همچون مقادیر مستمری را به نحو مناسبی محاسبه کنیم. اگر چه از مدل گامپرتز استفاده می‌کنیم اما ادعایی در مورد اینکه بهترین مدل ممکن را به داده‌ها برازش داده‌ایم، نداریم. هدف در اینجا به وضوح نشان دادن ترکیب مدل مرگ‌ومیر (برای سادگی گامپرتز) با پوشش مدل چند وضعیتی است که چهارچوب وابسته آنها را نشان دهد.

۲. تحلیل مطالب

شواهدی، بر تأثیر دو عامل سانحه مشترک و سندروم قلب شکسته بر قراردادهای بیمه مشترک زوجین وجود دارد و تمامی این شواهد برای ارائه روشی مناسب به منظور مدل‌بندی وابستگی باقی‌مانده طول عمر زوجین اختصاص یافته است، که

-
1. Sverdrup, 1965
 2. Waters, 1984
 3. Norberg, 1989
 4. Spreux and Wang, 2008
 5. Dickson et al., 2009
 6. Gompertz Law

این وابستگی می‌تواند تأثیر معنی‌دار این مخاطره روی قراردادهای بیمه‌ای زندگی مشترک زوجین را مدیریت کند.

یک راه برای مدل‌بندی وابستگی بین طول عمرها استفاده از مدل مارکوف با وضعیت‌های محدود است. در این رویکرد برآمدهای ممکن به عنوان تعداد وضعیت‌ها قلمداد می‌شوند. انتقال، بین وضعیت‌ها توسط ماتریس شدت انتقال کنترل می‌شود. برای مدل‌بندی وابستگی تحت این رویکرد از دو مدل مارکوف و نیم‌مارکوف استفاده می‌شود. در مدل مارکوف، شدت انتقال تنها بسته به وضعیت جاری است، در حالی که در مدل نیم‌مارکوف شدت انتقال علاوه بر وضعیت جاری به مدت زمانی نیز بستگی دارد که در آخرین وضعیت سپری شده است.

مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف شفافیت و وضوح بسیار بالایی در بیان مفهوم دارند، به این معنی که به راحتی می‌توان انتقال وضعیت‌ها در یک مدل چند وضعیتی را مشاهده کرد. برای مثال می‌توان به جابه‌جایی از وضعیت تأهل به بیوگی و تأثیر این ضربه روی مرگ و میر زوج باقی‌مانده اشاره نمود.

۱-۲. فرایند مارکوف

برای روشن‌شدن مفهوم کلی فرایند مارکوف می‌توان گفت که اگر زمان را در این فرایند به سه دوره گذشته، حال و آینده تقسیم کنیم، آینده این فرایند بستگی به مسیری ندارد که در گذشته طی کرده است و تنها به موقعیت آن در زمان حال وابسته است. یعنی تعداد پیشامدهایی که از یک لحظه معین به بعد اتفاق می‌افتد، مستقل از پیشامدهایی است که قبل از آن اتفاق افتاده است. به عبارت دیگر، چنانچه وضعیت فرایند در لحظاتی مانند t_1, \dots, t_n مشخص باشد، می‌توان گفت که برای پیش‌بینی حرکت آینده این فرایند، تنها آخرین اطلاعات، یعنی وضعیت فرایند در لحظه t_n کافی است.

تعریف: فرایند تصادفی $\{X(t), t \geq 0\}$ یک فرایند مارکوف است، اگر برای $n \geq 1$ رابطه $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1}$ و $i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ و $i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ و $n \geq 1$ رابطه

$$\Pr(X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0) \\ = \Pr(X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1})$$

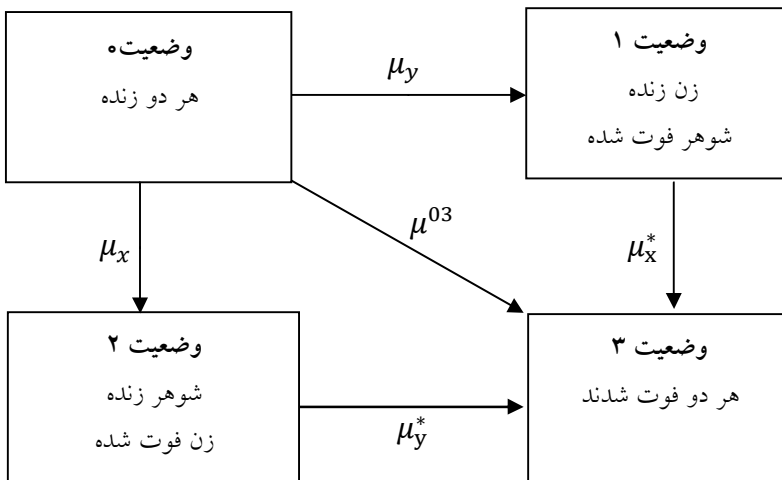
برقرار باشد. این خاصیت را خاصیت مارکوفی می‌نامند و این فرایند یک فرایند مارکوف مرتبه اول است.

در فرایند مارکوف مرتبه دوم، وضعیت آینده، هم به وضعیت فعلی و هم به وضعیت پیش از این وضعیت بستگی دارد، به‌همین ترتیب فرایندهای مارکوف مراتب بالاتر ادامه می‌یابند.

فرایندهای مارکوف بر اساس پارامتر زمان و فضای وضعیت خود رده‌بندی می‌شوند، بر اساس فضای وضعیت، یک فرایند مارکوف می‌تواند یک فرایند مارکوف وضعیت گسسته یا یک فرایند مارکوف وضعیت پیوسته باشد.

۱-۱-۲. مشخصات مدل مارکوف

شکل ۱. نمایی از مدل مارکوف



فرایند مارکوف در این مطالعه به‌راحتی توسط شکل ۱ بیان می‌شود. در اینجا ۴ وضعیت برای یک زوج در هر موقع از زمان در حالت‌های ممکن، توسط پیکانی که نشان‌دهنده انتقال‌های ممکن بین وضعیت‌هاست نشان داده شده است. فرایند،

فضای وضعیت $\{0, 1, 2, 3\}$ را دارد برای مثال اگر $X(t) = 0$ باشد به این معنی است که هر دو زن و شوهر در زمان t زنده هستند. فرض می‌کنیم که نیروی مرگ‌ومیر یک فرد (چه زن و چه مرد) وابسته به سن است نه به وضعیت تأهل او. نیروی مرگ‌ومیر یک زن متأهل $x + t$ ساله با وجود اثرگذاری همه عوامل جز عامل سانحه مشترک، μ_{x+t} و نیز نیروی مرگ‌ومیر برای زنی که در سن $x + t$ سالگی همسر خود را از دست داده است؛ μ_{x+t}^* می‌باشد. به همین ترتیب نیروی مرگ‌ومیر برای مرد متأهل $y + t$ ساله با اثرگذاری همه عوامل جز عامل سانحه مشترک μ_{y+t} و نیز برای مردی در همین سن که همسر خود را از دست داده μ_{y+t}^* است.

عامل سانحه مشترک باعث می‌شود فرایند مستقیماً از وضعیت 0 به 3 منتقل شود. با استفاده از فرضیه‌های مدل استاندارد مارکوف، بدون این انتقال، فوت هم‌زمان در این مدل غیرممکن است همچنین μ^{03} ، شدت جابه‌جایی از وضعیت 0 به وضعیت 3 است که مستقل از سن (زمان) می‌باشد. این فرضیه به راحتی عملی است اگر اطلاعات کامل در مورد فوت، بر اثر سانحه مشترک جمع‌آوری شده باشد. استفاده از انتقال سانحه مشترک به این معنی است که نیروی مرگ‌ومیر کلی، برای یک زن متأهل $x + t$ ساله برابر با $\mu_{x+t} + \mu^{03}$ و به طور مشابه برای یک مرد متأهل $y + t$ ساله برابر با $\mu_{y+t} + \mu^{03}$ است.

در بسیاری از مدل‌ها، الگوی احتمال انتقال به صورت زیر دنبال می‌شود:

$${}_t p_x^{ij} = \Pr(S_{x+t} = j | S_x = i) \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad x, t \geq 0$$

محاسبه این احتمالات نیازمند دانستن چند فرضیه تکنیکی به اضافه فرضیه

مارکوف است.

فرض 1: احتمال دو انتقال یا بیشتر از آن در فاصله کوچک h ، $o(h)$ نامیده می‌شود

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0 \quad \text{که در آن } o(.) \text{ تابعی است به طوری که:}$$

فرض ۲: $t p_x^{ij}$ (احتمال اینکه یک فرد X ساله حداقل تا t سال آینده از وضعیت i به وضعیت j منتقل شود)، تابعی فارغ از t است.

حال با داشتن این دو فرضیه می‌توان $t p_x^{ij}$ را با استفاده از برابری چپمن - کولموگروف^۱ محاسبه کرد، که می‌توان به این صورت نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, x+t) = P(x, x+t) r(x+t) \quad x, t \geq 0$$

که در آن:

$P(x, x+t)$: ماتریسی است که درایه‌های (i, j) ماتریس $t p_x^{ij}$ را نشان

می‌دهد.

$r(x+t)$: ماتریس مولد بی‌نهایت کوچک یا ماتریس شدت نیز نامیده

می‌شود. درایه (i, j) ام در $r(x+t)$ به صورت $\begin{cases} \mu_{x+t}^{ij} & ; i \neq j \\ -\sum_{j \neq i}^3 \mu^{ij}(x+t) & ; i = j \end{cases}$

است.

فرض ۳: در مدل‌های چند وضعیتی برای $h > 0$ عبارت زیر برقرار است:

$$t p_x^{ij} = 1 - h \sum_{j \neq i}^n \mu_x^{ij} + o(h)$$

در ادامه عباراتی را برای کمک به حل احتمالات انتقال به دست آوردیم؛ که برای

نمونه برخی از این رابطه‌ها را تعریف کرده و ثابت می‌کنیم:

- $t p_{x:y}^{00}$: احتمال این است که یک زوج به سن X و Y در وضعیت صفر باشند

و تا زمان t در همین وضعیت باقی بمانند.

- $t p_x^{11}$: احتمال این است که یک زن X ساله در وضعیت یک باشد و تا زمان

t در همین وضعیت باقی بماند.

- $t p_{x:y}^{01}$: احتمال این است که یک زوج به سن X و Y در وضعیت صفر باشند

و تا زمان t به وضعیت یک منتقل شوند.

– $t p_x^{13}$: احتمال این است که یک زن x ساله که همسر خود را از دست داده‌است تا زمان t از وضعیت یک به وضعیت سه منتقل شود.

به‌طورکلی این نمادها را به‌این‌صورت بیان می‌کنیم:

$$t p_{x:y}^{00} = \exp \left(- \int_0^t (\mu_{x+s} + \mu_{y+s} + \mu^{03}) ds \right)$$

$$t p_x^{11} = \exp \left(- \int_0^t \mu_{x+s}^* ds \right)$$

$$t p_y^{22} = \exp \left(- \int_0^t \mu_{y+s}^* ds \right)$$

$$t p_{x:y}^{01} = \int_0^t t p_{x:y}^{00} \mu_{y+s} t_{-s} p_{x+s}^{22} ds$$

$$t p_{x:y}^{02} = \int_0^t t p_{x:y}^{00} \mu_{x+s} t_{-s} p_{y+s}^{22} ds$$

$$t p_x^{13} = \int_0^t s p_x^{11} \mu_{x+s}^* ds$$

$$t p_x^{23} = \int_0^t s p_y^{22} \mu_{y+s}^* ds$$

۲-۱-۲. برآورد پارامترها

فرض کنید T_x و T_y به‌ترتیب باقی‌ماندهٔ عمر زن و شوهر باشند. تابع چگالی توأم T_x و T_y به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_{T_x, T_y}(u, v) = \begin{cases} u p_{x:y}^{00} v - u p_{y+u}^{22} \mu_{y+v} \mu_{x+u}^* & u > v \\ v p_{x:y}^{00} u - v p_{x+v}^{11} \mu_{y+v} \mu_{x+u}^* & u < v \\ u p_{x:y}^{00} \mu^{03} & u = v \end{cases}$$

با داشتن تابع چگالی توأم دو متغیره می‌توان ماکسیمم درست‌نمایی را از تابع لگاریتم درست‌نمایی برآورد نمود. فرض کنید استقلال بین زوجها در داده‌ها برقرار باشد تابع لگاریتم درست‌نمایی می‌تواند به صورت مجموع سه قسمت l_1, l_2, l_3 نوشته شود.

$$l = l_1 + l_2 + l_3$$

$$l_1 = \sum_{i=1}^n \left(- \int_0^{v_1} (\mu_{x_i+t} + \mu_{y_i+t} + \mu^{03}) dt + d_i^1 \ln \mu_{y_i+v_i} + d_i^2 \ln \mu_{x_i+v_i} + d_i^3 \ln \mu^{03} \right)$$

$$l_2 = \sum_{j=1}^{m_1} \left(- \int_0^{u_{1,j}} \mu_{x_j+t}^* dt + h_{1,j} \ln \mu_{x_j+u_{1,j}}^* \right)$$

$$l_3 = \sum_{k=1}^{m_2} \left(- \int_0^{u_{2,k}} \mu_{y_k+t}^* dt + h_{2,k} \ln \mu_{y_k+u_{2,k}}^* \right)$$

که در آن:

– n مجموع تعداد زوجین در مجموعه داده‌ها؛

– m_1 (m_2) مجموع تعداد زنان (مردان) که همسر خود را در مجموعه داده‌ها از دست داده‌اند؛

– u_i مدت زمان سپری‌شده تا انتقال زوج i ام از وضعیت صفر به دیگر وضعیت‌ها؛

– $d_i^j = 1$ اگر زوج i ام از وضعیت صفر به وضعیت j در $t = u_i$ جابه‌جا شود. $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, 2, 3$

– $u_{1,j}$ ($u_{2,k}$) مدت زمان سپری‌شده تا i امین (k امین) زنی (مردی) که همسر خود را از دست داده و از وضعیت ۱ (۲) خارج شود. $j = 1, \dots, m_1$ و $k = 1, \dots, m_2$

– $h_{1,j=1}$ اگر i امین زنی که همسرش را از دست داده در زمان $t = u_{1,j}$ فوت کند.

– $h_{2,k=1}$ اگر k امین مردی که همسرش را از دست داده در زمان $t = u_{2,k}$ فوت کند.

– X_i و Y_i سنینی هستند که زن و مرد با بستن قرارداد وارد سیستم بیمه‌ای شده‌اند و به این ترتیب زوج i ام داده‌ها محسوب می‌شوند.

با ماکسیم کردن سه قسمت تابع لگاریتم درست‌نمایی می‌توانیم، ماکسیم درست‌نمایی شدت انتقال در هر وضعیت را برآورد کنیم.

برای محاسبه لگاریتم درست‌نمایی نیازمند به تعریف فوت در اثر سانحه مشترک هستیم با وجود اینکه اطلاعات قطعی نیز در مورد دلیل فوت، در این باره

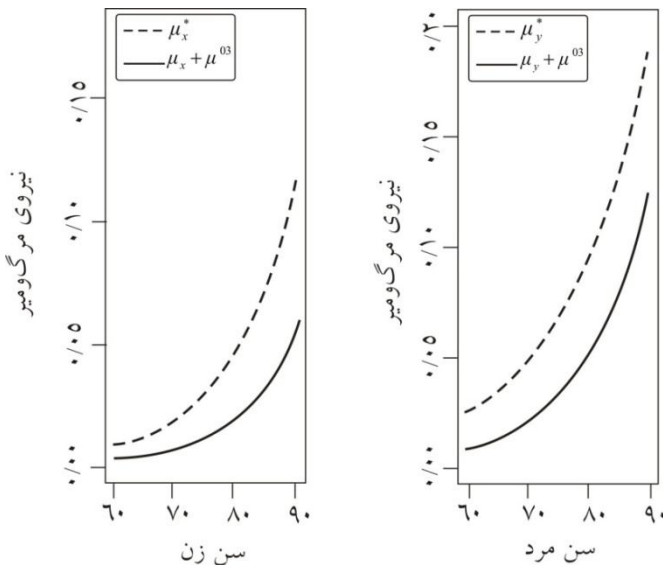
نداریم. در اینجا برای محاسبه نیروی مرگ‌ومیر از قانون گامپرتز $\mu_x = BC^x$ (به جز μ^{03} که نسبت به سن ثابت فرض می‌شود) استفاده می‌شود.

جدول ۱. برآورد پارامترهای گامپرتز در مدل مارکوف

انحراف استاندارد	C	انحراف استاندارد	B		
۰/۸۰۸۶	۱/۱۲۹۰	۰/۸۶۴۳	$9/754 \times 10^{-7}$	μ_x	زنان
۰/۳۱۰۳	۱/۰۹۸۲	۰/۷۴۲۱	$2/586 \times 10^{-5}$	μ_x^*	
۰/۱۴۱۷	۱/۰۹۸۱	۰/۸۵۷۳	$2/553 \times 10^{-5}$	μ_y	مردان
۰/۱۱۱۱	۱/۰۷۱۵	۰/۲۶۹۱	$3/795 \times 10^{-4}$	μ_y^*	

در جدول ۱ مقادیر برآوردشده پارامترهای گامپرتز از مدل مارکوف برازش داده‌شده به داده‌ها نشان داده شده است. مقدار عامل سانحه مشترک ۰/۱۳۹۴٪ و انحراف استاندارد ۰/۶۴۵۵٪ برآورد شده است.

نمودار ۱. نیروی مرگومیر برای هر دو وضعیت بیوه زنان و مردان



در نمودار ۱ نیروی مرگومیر را به وضعیت‌های مختلف برازش دادیم؛ قابل مشاهده است که برای هر دو جنسیت زن و مرد با پذیرش عامل سانحه مشترک و تخصیص ۵ روز به آن افزایش نیروی مرگومیر بعد از داغدیدگی را در مدل داریم؛ همچنین می‌توان مشاهده کرد که داغداری تأثیر زیادی از سن می‌پذیرد؛ برای مثال نیروی مرگومیر برای زنی که شوهرش در قید حیات است تا تقریباً سن ۷۰

سالگی ثابت است؛ و پس از آن سرعت بیشتری می‌یابد درحالی‌که برای زن بیوه در سن ۷۰ سالگی نیروی مرگ‌ومیر از ابتدای داغدارشدن در حال افزایش است ولی نه چندان زیاد ولی تقریباً بعد از سن ۷۰ سالگی شیب بیشتری پیدا کرده و به سرعت در حال افزایش است.

با مقایسه نمودار مردان با زنان مشاهده می‌شود نیروی مرگ‌ومیر مردان از همان ابتدا در حال افزایش است؛ همچنین که تأثیر داغدارشدن و ازدست‌دادن همسر برای یک مرد خیلی بیشتر از یک زن است چرا که تقریباً نیروی مرگ‌ومیر با مقدار حدودی ۰/۰۳ برای یک زن بیوه در سن ۷۵ سالگی و برای مردی با شرایط مشابه در سن ۶۰ سالگی است.

۲-۲. مشخصات مدل نیم‌مارکوف

معقول به نظر می‌رسد که نیروی مرگ‌ومیر بیوه‌شدگان به طور عمده بیشتر از فردی متأهل در سنین مشابه باشد؛ همچنین این امری منطقی است که تأثیر دردناک داغدیدگی روی سلامتی زوج باقی‌مانده در ماه‌های اول بسیار شدیدتر از زمان‌های دیگر است. در واقع نتایج به‌دست‌آمده از علوم پزشکی و جمعیت‌شناختی، از تأثیر سندروم قلب شکسته به‌عنوان تأثیر عامل کوتاه‌مدت این ضربه بر نیروی مرگ‌ومیر زوج باقی‌مانده یاد می‌کنند. از توابع پارامتری برای مدل‌بندی نیروی مرگ‌ومیر بعد از داغدیدگی استفاده می‌کنیم:

برای زنی که همسر خود را ازدست‌داده‌است:

$$\mu^*(x, t) = (1 + a_1 e^{-k_1 t})(\mu_{x+t} + \mu^{03}) = F_1(t)(\mu_{x+t} + \mu^{03})$$

برای مردی که همسر خود را ازدست‌داده‌است:

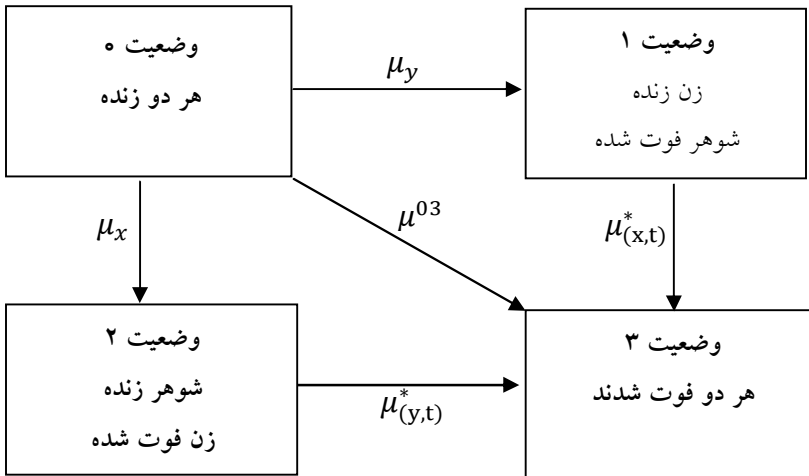
$$\mu^*(y, t) = (1 + a_2 e^{-k_2 t})(\mu_{y+t} + \mu^{03}) = F_2(t)(\mu_{y+t} + \mu^{03})$$

که $a_j > -1$ و $k_j > 0$ برای $j = 1, 2$ و مدت زمان از شروع داغدیدگی

است. نیروی مرگ‌ومیر پس از داغدیدگی نسبتی متناظر با نیروی مرگ‌ومیری است که اگر عامل داغدیدگی ناشی از فوت یکی از زوجین رخ نمی‌داد. در ابتدا نیروی مرگ‌ومیر با وجود عامل داغدیدگی با درصدی از $100a_1\%$ برای زنان و

$100a_2\%$ برای مردان افزایش می‌یابد. با تأثیرگذاری عامل سندروم قلب شکسته همچنان که t در حال افزایش است جمله نمایی فاکتورهای $F_1(t)(\mu_{x+t} + \mu^{03})$ و $F_2(t)(\mu_{y+t} + \mu^{03})$ در حال کاهش و در نهایت $F_1(t)$ و $F_2(t)$ (عوامل افزایشدهنده) به یک میل می‌کنند. پارامترهای k_1 و k_2 منعکس‌کننده اثر زمان تا از بین رفتن تأثیر سندروم قلب شکسته می‌باشند. خصوصیات مدل نیم‌مارکوف در شکل ۲ نمایش داده شده است.

شکل ۲. نمایی از مدل نیم‌مارکوف



۲-۲-۱. برآورد پارامترها

چون بسط نیم‌مارکوف تنها متأثر از نیروی مرگ‌ومیر بعد از داغدیدگی است مقادیر μ^{03}, μ_y, μ_x تفاوت معنایی و مفهومی در مقایسه با مدل مارکوف ندارند. با استفاده از مقادیر برآوردشده پارامترهای μ^{03}, μ_y, μ_x می‌توان پارامترهای باقی‌مانده را به وسیله ماکسیمم درست‌نمایی برآورد نمود. تابع درست‌نمایی l_1^p برای پارامترهای a_1 و k_1 به صورت زیر است:

$$l_1^p = \sum_{j=1}^{m_1} \left(- \int_0^{u_{1,j}} (1 + a_1 e^{-k_1 t}) (\hat{B}_1 \hat{C}_1^{x+t} + \mu^{03}) dt + h_{1,j} \ln((1 + a_1 e^{-k_1 t}) (\hat{B}_1 \hat{C}_1^{x+t} + \mu^{03})) \right)$$

\hat{C}_1 و \hat{B}_1 برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برای B_1 و C_1 هستند. تابع درست‌نمایی جزئی l_2^p نیز برای a_2 و k_2 با تعویض پارامترهای l_1^p به همین ترتیب می‌توان به دست آورد. با ماکسیمم کردن l_1^p و l_2^p می‌توان پارامترهای نیم‌مارکوف را برآورد کرد. تابع کامل لگاریتم درست‌نمایی l به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 l &= l_1 + l_2 + l_3 \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(- \int_0^{v_1} (\mu_{x_i+t} + \mu_{y_i+t} + \mu^{03}) dt + d_i^1 \ln \mu_{y_i+v_i} + \right. \\
 &\quad \left. d_i^2 \ln \mu_{x_i+v_i} + d_i^3 \ln \mu^{03} \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{u_{1,j}} (1 + a_1 e^{-k_1 t}) (\mu_{x_i+v_i+t} + \mu^{03}) dt + h_{1,j} \ln((1 + \right. \\
 &\quad \left. a_1 e^{-k_1 t}) (\mu_{x_i+v_i+t} + \mu^{03})) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{u_{2,k}} (1 + a_2 e^{-k_2 t}) (\mu_{y_i+v_i+t} + \mu^{03}) dt + h_{2,k} \ln((1 + \right. \\
 &\quad \left. a_2 e^{-k_2 t}) (\mu_{y_i+v_i+t} + \mu^{03})) \right)
 \end{aligned}$$

از برابری‌های بالا در می‌یابیم $n - m_1$ مشاهده‌شده، شامل زنانی است که وارد وضعیت بیهوش‌شدگی نشده‌اند پس $u_{1,j}$ برابر با صفر است و طبیعتاً $h_{1,j}$ نیز مقدار صفر را می‌گیرد وقتی $j = 1, 2, \dots, n - m_1$

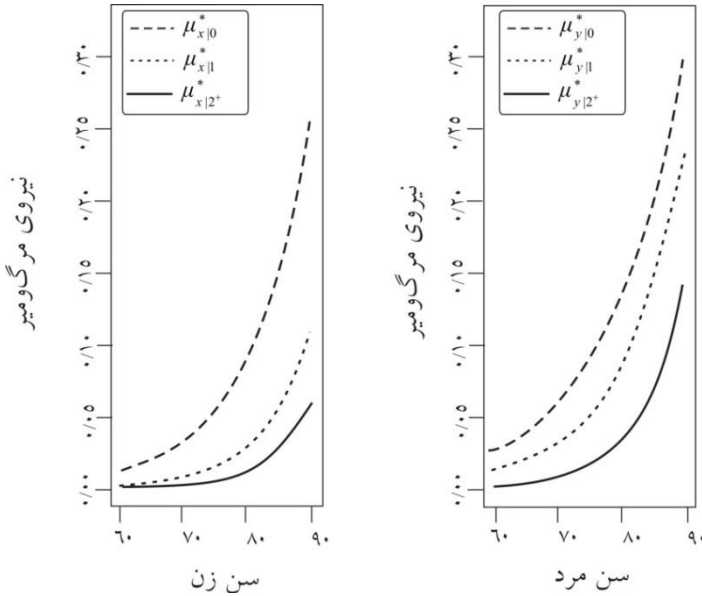
جدول ۲. برآورد پارامترهای k_2, k_1, a_2, a_1 در مدل نیم‌مارکوف

انحراف استاندارد		برآورد	
۰/۰۶۵۷	۳/۳۵۴۸	a_1	زنان
۰/۱۵۲۹	۰/۵۰۱۹	k_1	
۰/۰۳۵۰	۱۱/۰۸۳۶	a_2	مردان
۰/۱۰۴۳	۷/۹۲۰۶	k_2	

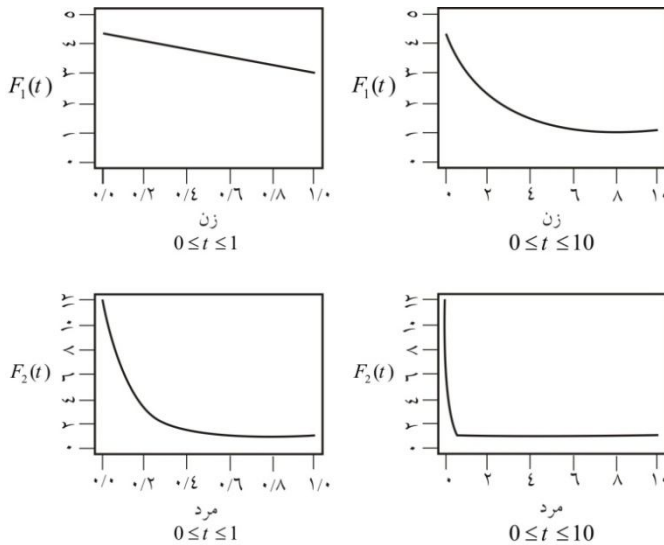
برآورد پارامترهای k_2, k_1, a_2, a_1 و انحراف استانداردشان در جدول ۲ نشان داده شده است. یکی از محدودیت‌ها در استفاده از مدل نیم‌مارکوف داشتن تعداد پارامترهای بالا با عدم قطعیت است. به این دلیل که پارامترهای نیم‌مارکوف فقط از تعداد کمی از داده‌ها یعنی با فوت‌های بعد از داغدیدگی سروکار دارند. با این حال هر چهار پارامتر، میزان قابل ملاحظه‌ای بالاتر از صفر هستند و این امر بیانگر این

است که به هر دو پارامتر a_i برای نشان دادن تأثیر میزان داغدیدگی و پارامترهای سرعت کم‌شدن اثر داغدیدگی یعنی k_i نیازمند هستیم.

نمودار ۲. نیروی مرگ‌ومیر طی دوره زمانی پس از داغدارشدن



نمودار ۳. عامل‌های $F_1(t)$ و $F_2(t)$ در مدل نیم‌مارکوف



حال برای فهم بهتر مدل نیم‌مارکوف، نمودار ۲ را ملاحظه فرمایید که نشان می‌دهد نیروی مرگ‌ومیر برای هر دو جنس زن و مرد در سال‌های مختلف، متفاوت است. مقادیر به صورت سه نیروی مرگ‌ومیر تقسیم شده‌اند:

$$- \mu_{x(y)}^*|0: \text{نیروی مرگ‌ومیر در طی یک سال پس از داغدیدگی؛}$$

$$- \mu_{x(y)}^*|1: \text{نیروی مرگ‌ومیر در طی دو سال پس از داغدیدگی؛}$$

$$- \mu_{x(y)}^*|2+: \text{نیروی مرگ‌ومیر بعد از دو سال پس از داغدیدگی.}$$

مشاهده می‌کنیم که میزان نیروی مرگ‌ومیر زن کمتر از یک سال بیوه‌شده، بیشتر از نیروی مرگ‌ومیر زن کمتر از دو سال و بیشتر از دو سال بیوه شده است. درحالی‌که نیروی مرگ‌ومیر زن کمتر از دو سال و بیشتر از دو سال بیوه‌شده تفاوت چندانی با یکدیگر ندارد. عامل داغداری و بیوه‌شدن تقریباً بعد از سن ۷۰ سالگی تأثیرگذاری بیشتری بر هر سه نیروی مرگ‌ومیر زنان می‌گذارد، این امر تا حدودی در نیروی مرگ‌ومیر مردان نیز مشهود است، مضاف بر اینکه سال‌های اول و دوم ازدست‌دادن همسر برای مردان در درازمدت تأثیرگذارتر از زمان ازدست‌دادن همسر بعد از دو سال است.

از نمودار ۳ نیز می‌توان دریافت که چگونه عوامل افزایشنده $F_1(t)$ و $F_2(t)$ در طول زمان تغییر می‌کنند. ستون اول نمودار ۳ بر یک سال پس از داغدیدگی تمرکز دارد که به وضوح نشان‌دهنده این است که مردانی که همسر خود را ازدست‌داده‌اند به مراتب بیشتر از زنان با همین شرایط تحت تأثیر عامل داغدیدگی بوده‌اند. از ستون دوم این نمودار نیز می‌توان نتیجه گرفت که تأثیر قلب شکسته در زنانی که همسر خود را ازدست‌داده‌اند در مقابل مردان با این وضعیت ماندگارتر است.

۳. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۳-۱. وابستگی ربعی مثبت

به منظور درک وابستگی بلندمدت که توسط مدل‌های مارکوف بیان می‌شود، استفاده از مفهوم وابستگی ربعی مثبت^۱ لازم است. این موضوع اولین بار توسط لِهمن^۲ معرفی شد. وابستگی ربعی مثبت یک صورت از وابستگی بین متغیرهای تصادفی X و Y است، که رابطه آن به این صورت است:

$$\Pr [(X, Y) \leq (x, y)] \geq \Pr[X \leq x] \Pr[Y \leq y]$$

یا به طور معادل:

$$\Pr [(X, Y) > (x, y)] \geq \Pr[X > x] \Pr[Y > y]$$

به این معنی که مقادیر کوچک X را به مقادیر کوچک Y و مقادیر بزرگ X را به مقادیر بزرگ Y پیوند می‌دهد. حال فرض می‌کنیم T_x و T_y باقی‌مانده طول عمر زن و شوهر باشند. باقی‌مانده‌های طول عمر، T_x و T_y در صورتی وابستگی ربعی مثبت دارند، که از طریق روابط بالا و بازنویسی آنها به دو صورت زیر باشند:

$$\Pr(T_x \leq t | T_y \leq s) \geq \Pr(T_x \leq t) \quad \forall t, s \geq 0$$

و

$$\Pr(T_x > t | T_y > s) \geq \Pr(T_x > t) \quad \forall t, s \geq 0$$

درمی‌یابیم که هر فرد در صورتی که همسرش برای مدت طولانی زنده باشد، امید به زندگی طولانی‌تری دارد و در صورتی که همسرش زود فوت کند امید به زندگی کمتری خواهد داشت.

نوربرگ^۳ ثابت کرد که مطالب بیان‌شده در مدل‌های مارکوف در صورتی که مؤلفهٔ سانحهٔ مشترک وجود نداشته باشد، درست است به طوری که:

$$\mu_x \equiv \mu_x^* \quad \text{و} \quad \mu_y \equiv \mu_y^* \quad \Leftrightarrow \quad T_x \text{ و } T_y \text{ مستقل هستند}$$

1. Positive Quadrant Dependence (PQD)

2. Lehmann, 1966

3. Norberg, 1989

$$T_y \text{ و } T_x \text{ وابستگی ربعی مثبت دارند} \Leftrightarrow \mu_y \leq \mu_y^* \text{ و } \mu_x \leq \mu_x^*$$

بدون مؤلفهٔ سانحه مشترک، باقی‌ماندهٔ طول عمر زوجین در صورتی که نیروی مرگ‌ومیر قبل و بعد از داغدیدگی مساوی باشد، از یکدیگر مستقل هستند. زمانی که انتقال وضعیت سانحهٔ مشترک (μ^{03}) را در مدل مارکوف دخیل می‌کنیم، نتایج نوربرگ کمی تغییر خواهد کرد:

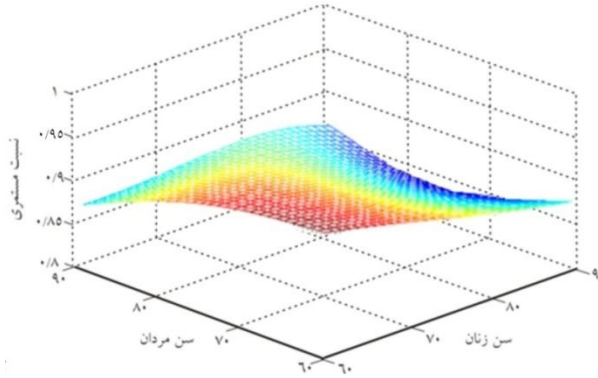
$$T_y \text{ و } T_x \text{ وابستگی ربعی مثبت دارند} \Leftrightarrow \mu_y + \mu^{03} \leq \mu_y^* \text{ و } \mu_x + \mu^{03} \leq \mu_x^*$$

تعجیبان (۱۳۹۲) نیز ثابت می‌کند که حتی با وجود μ^{03} نیز اگر نیروی مرگ‌ومیر قبل و بعد از داغدیدگی مساوی باشد PQD در مدل مارکوف برقرار خواهد بود. اما در مدل نیم‌مارکوف عامل‌های افزایشنده $F_1(t)$ و $F_2(t)$ برای هر t ، بزرگ‌تر از یک هستند. نیروی مرگ‌ومیر بعد از داغدیدگی بیشتر از نیروی مرگ‌ومیر متناظر با آن قبل از داغدیدگی است. PQD در نیم‌مارکوف همیشه برقرار نیست، زیرا در این مدل کسانی که همسر خود را از دست داده‌اند فرصت بهبود و بازیابی دارند، چون طبق رابطهٔ بالا PQD بیان می‌کند، نیروی مرگ‌ومیر زن X ساله‌ای که مدت‌ها از زمان فوت شوهرش می‌گذرد بیشتر از زن X ساله‌ای است که تازه شوهرش را از دست داده‌است و این خلاف فرض نیم‌مارکوف است، چون در نیم‌مارکوف زن اول فرصت بهبودی بیشتری نسبت به زن دوم دارد.

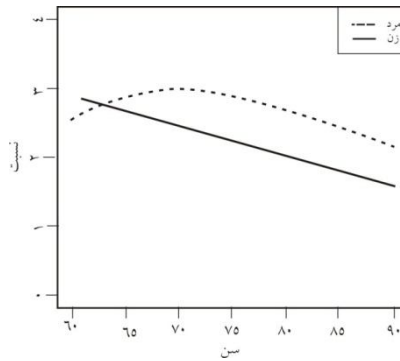
۲-۳. مفاهیمی برای مقادیر مستمری

هر دو مدل‌های مارکوفی و نیم‌مارکوفی نشان‌دهندهٔ افزایش مرگ‌ومیر بعد از داغدیدگی هستند. اگرچه میزان شدت هریک، در این مقوله متفاوت است. زمانی که مدل نیم‌مارکوف اجازهٔ بازیابی بهبودی را بعد از داغدیدگی می‌دهد، مدل مارکوف، نیروی مرگ‌ومیر را به صورت دائمی در حال افزایش فرض می‌کند. در ادامه تأثیر این تفاوت را روی مقادیر مستمری مورد بررسی قرار می‌دهیم.

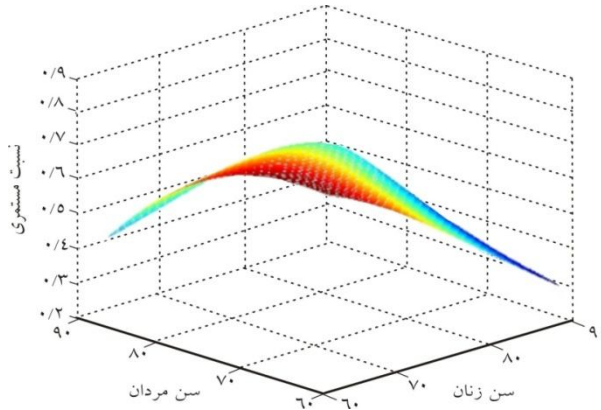
نمودار ۴. نسبت حالت وابسته به استقلال مستمری آخرین بازمانده در مدل مارکوف



نمودار ۵. نسبت $\frac{\mu_x^*}{\mu_x + \mu^{03}}$ و $\frac{\mu_y^*}{\mu_y + \mu^{03}}$ محاسبه شده از برازش مدل مارکوف



نمودار ۶. نسبت حالت وابسته به استقلال مستمری آخرین بازمانده در مدل نیم‌مارکوف



ابتدا مدل مارکوف را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نمودار سه‌بعدی ۴ نشان‌دهنده نسبت مقادیر مستمری آخرین بازمانده در حالت وابستگی طول عمر زوجین به فرض طول عمر مستقل تحت مدل مارکوف است. تمام نسبت‌های موجود در این نمودار کمتر از یک است و نشان می‌دهد در صورت استفاده از فرض استقلال بین طول عمرها مستمری آخرین بازمانده بیش از حد قیمت‌گذاری می‌شود. همچنین در این نمودار مشاهده می‌کنیم که نسبت مستمری‌ها وقتی تفاوت سنی بین زوجین بیشتر باشد، کمتر است. این مشاهدات بر این موضوع دلالت دارد که تأثیر وابستگی بلندمدت، قابل توجه و معنی‌دارتر از زمانی است که فاصله سنی $|x-y|$ زیادتر است. نمودار سه‌بعدی ۲ نامتقارن است. این نامتقارن بودن را می‌توان با استفاده از نسبت $\frac{\mu_y^*}{\mu_y + \mu^{03}}$ و $\frac{\mu_x^*}{\mu_x + \mu^{03}}$ توضیح داد. از نمودار ۵ مشاهده می‌کنیم نسبت‌ها از یکدیگر متفاوت هستند و این موضوع نشان‌دهنده تفاوت جنسی در تأثیرپذیری از عامل داغدیدگی روی مرگ‌ومیر زوجین است.

سپس مدل نیم‌مارکوف را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نمودار ۶ نشان‌دهنده نسبت مقادیر مستمری آخرین بازمانده در حالت وابسته طول عمر زوجین به فرضیه طول عمر مستقل آنها با استفاده از مدل نیم‌مارکوف است. مشاهده می‌کنید که نسبت‌ها به یک نزدیک هستند.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

به وضوح می‌توان دریافت که بین طول عمر زن و شوهر وابستگی وجود دارد. اما ماهیت وابستگی صرفاً به صورت مشاهدات تجربی، کافی نیست. از طریق مدل‌های مارکوفی به مستمری‌ها، داده‌های مرگ‌ومیر را برازش دادیم و بهتر به دو جنبه از تفاوت وابستگی بین طول عمر زوجین پی بردیم. ابتدا، عامل سانحه مشترک μ^{03} که بیان می‌کند ریسک ناشی از حادثه‌ای مصیبت‌بار روی زندگی هر دو زوجین تأثیر می‌گذارد. دوم اینکه در مدل نیم‌مارکوف به وسیله عوامل $F_1(t)$ و $F_2(t)$ مرگ‌ومیر ناشی از ضربه فوت یکی از زوجین را اندازه‌گیری کردیم.

نقطه ضعف‌هایی در هر دو مدل مارکوف و نیم‌مارکوف وجود دارد، چرا که باید تعداد زیادی از پارامترهای وابسته را وارد مدل کرده و به حجم کمی از داده‌ها اختصاص دهیم. پارامترهای برآوردشده به واریانس‌های تقریباً بزرگی میل می‌کنند و با کم‌کردن یا اضافه‌کردن تعداد کمی از داده‌ها نتیجه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی به صورت قابل توجهی تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

شاید یکی از معایب استفاده از مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف استفاده از پارامترهای نسبتاً زیاد در برآورد مدل باشد، اگر از قانون گامپرتز برای مدل‌بندی توزیع طول عمر حاشیه‌ای استفاده کنیم در مدل مارکوف به برآورد ۹ پارامتر نیاز داریم (یک پارامتر عامل سانحه مشترک، دو پارامتر از هر حالت وضعیت تأهل و بیوگی برای زن و مرد). برای مدل نیم‌مارکوف نیز به همین ترتیب است.

مقایسه به صورت کمی برای ارزیابی بهره‌مندی از پارامترهای اضافی به مدل‌های برازش داده‌شده در مدل‌های مارکوف امر دشواری است؛ زیرا مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف با استفاده از درست‌نمایی جزئی، برازش داده شده‌اند؛ به این معنی که به آسانی نمی‌توان از معیارهای مبتنی بر روش‌های درست‌نمایی دیگری استفاده کرد.

اما برای این باوریم که مزایای دیگری در استفاده از مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف وجود دارد که به شرح زیر می‌باشند:

- در مطالعات مربوط به مرگ و میر استفاده از نیروی مرگ و میر به جای تابع توزیع، امری طبیعی است. ساختار وابسته مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف در اثر ضربه ناشی از داغدیدگی روی نیروی مرگ و میر کاملاً واضح است در صورتی که این مسئله در استفاده از دیگر مدل‌ها کمتر مشخص است و هیچ یک از این مدل‌های دیگر همچون مفصل‌ها^۱ به طور مستقیم تأثیر داغدیدگی را روی مرگ و میر بازماندگان بیان نمی‌کنند. با استفاده از مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف با ملاحظه

به انتقال‌های بین وضعیت‌ها و تأثیر کوتاه‌مدت و بلندمدت ناشی از داغدیدگی روی مرگ‌ومیر، به سادگی می‌توان متوجه ماهیت وابستگی بین زندگی زوجین شد.

- با معرفی عامل‌های $F_1(t)$ و $F_2(t)$ در مدل نیم‌مارکوف می‌توان ضربه ناشی از سندروم قلب شکسته (که با گذشت زمان کم می‌شود) را کنترل کرد، در صورتی‌که انجام این کار با مدل‌های دیگر امر دشواری است.

- فرض کنید داده‌های مربوط به زندگی یک فرد که شامل اطلاعات راجع به وضعیت تأهل هر فرد در لحظه فوت اوست را داریم. ما حتی با استفاده از رویکردهای مارکوفی می‌توانیم طول مدت زمان بیوگی زوج باقی‌مانده را از طریق تابع لگاریتم درست‌نمایی محاسبه کنیم. برای روش‌های دیگر اگر اطلاعی از سن یکی از زوجین در قید حیات یا سن همسرش در زمان فوت را نداشته باشیم نمی‌توان از ساختار وابسته آنها بهره برد، چون این اطلاعات کافی نیست و تنها می‌توان داده‌های دو متغیره را به‌کاربرد.

به‌همین ترتیب می‌توانیم یک زندگی را با دانستن سن، جنسیت، وضعیت زوجین (و طول مدت زمان بیوگی آنها) مدل‌بندی کنیم. می‌توان این قیمت‌گذاری‌ها و ارزیابی‌ها را برای مستمری‌های زندگی و مستمری‌های یک فرد متأهل مسن یا بیوه مسن بهبود بخشید.

۵. پیشنهادها

از این‌پس پژوهش‌های بیشتری می‌تواند روی مدل‌سازی ساختار وابسته مرگ‌ومیر مشترک زندگی زوجین در چارچوب روش‌های مارکوفی انجام شود. از دیگر مباحث برای پژوهش‌های آینده می‌توان به اصلاح کردن ساختار وابسته طول عمر زندگی مشترک زوجین در مدل‌های مارکوفی برای مدل‌بندی مرگ‌ومیر زندگی مشترک زوجین اشاره نمود. همچنین ارتباط بین نرخ مرگ‌ومیر در وضعیت‌های متأهل و وضعیت‌های بیوه، نیاز به بررسی و مقایسه‌های بیشتری دارد یا بررسی این امر که چگونه عامل سانحه مشترک با سن زن و شوهر می‌تواند تغییر کند. از دیگر

مسائل می‌توان به این موضوع اشاره کرد که ما فقط تأثیر نزولی سندروم قلب شکسته را مدل‌بندی کرده‌ایم، در صورتی که می‌توان نرخ شدت برای انواع گوناگون ضایعه‌ها همچون سن، جنس و... را نیز مدل‌بندی کرد.

در این مقاله وابستگی ربعی مثبت را بر مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف مورد بررسی قرار دادیم. شرایط وابستگی ربعی مثبت در مدل مارکوف به دست‌آمد ولی بالعکس مثال‌هایی در رد وجود وابستگی ربعی مثبت در مدل نیم‌مارکوف نیز بیان شد. از پژوهش‌های آینده می‌تواند به چالش کشیدن یک موضوع بالقوه در مورد بررسی شرایط وابستگی ربعی مثبت در مدل مرگ‌ومیر نیم‌مارکوف باشد.

منابع

1. تعجیبیان، س.، ۱۳۹۲. کاربردهای رویکرد مارکوفی در مدل‌بندی مرگ‌ومیر زوجین. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی.
2. Carravetta, M., De Dominicis, R. and Manca, R., 1981. Semi markov process in social security problems. *Cahiers du*, 63, C.E.R.O.
3. Denuit, M., Dhaene, J.L.M., Le Bailly De Tillegem, C. and Teghem, S., 2001. Measuring the impact of a dependence among insured life lengths. *Belgian Actuarial Bulletin*, 1, pp.18-39.
4. Dickson, D.C.M., Hardy, M.R. and Waters, H.R., 2009. *Actuarial mathematics for Life contingent risk*. Cambridge University Press.
5. Frees, E.W., Carriere, J. and Valdez, E., 1996. Annuity valuation with dependent mortality. *The Journal of Risk and Insurance*, 63, pp.229-261.
6. Gompertz, B., 1825. On the nature of the function expressive of the law of human mortality. *Philosophical Transactions*, 27, pp.513-519.
7. Hoem, J.M., 1972, Inhomogeneous semi-Markov processes, Select actuarial tables, and duration dependence in demography, in T.N.E. Greville, *Population-Dynamics*, Academic Press, pp.251-296.
8. Jagger, C. and Sutton, C.J., 1991. Death after marital bereavement – is the risk increased?. *Statistics in Medicine*, 10, pp.395-404.
9. Ji, M. M. and Hardi, L.S., 2011. Markovian approaches to joint-life mortality. *North American Journal*, 15, pp.357-376.
10. Lehmann, E.L., 1966. Some concepts of dependence. *The Annual of Mathematical Statistics*, 37, pp.1137-1153

11. Norberg, R., 1989. Actuarial analysis of dependent lives. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 1989(2), pp.243-254.
12. Spreeuw, J. and Xu. W., 2008. *Modelling the short-term dependence between Two remaining lifetimes*. <<http://www.actuaries.org.uk>>, [Accessed 2 Oct 2013].
13. Sverdrup, E., 1965. Estimates and test procedures in connection with stochastic models for deaths. *Recoveries and Transfers between Different States of health*, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 48, pp.184-211.
14. Waters, H.R. 1984. An approach to study of multiple state models. *Journal of the Institute of Actuaries*, 114, pp.569-580.