

معرفی دو روش جدید برای تعیین حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه ایران

تاریخ دریافت: ۹۳/۰۵/۲۸
تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۲/۲۱

مریم تیموریان^۱
امیر تیمور پاینده نجف آبادی^۲
محمد قاسم وحیدی اصل^۳

چکیده

محاسبه حق بیمه نسبی در سیستم‌های پاداش - جریمه به روش‌های بیزی مورد استفاده و تأیید اغلب اکچوئری‌ها است اما نتایج به دست آمده با استفاده از روش‌های بیزی به دلایلی مثل پیچیدگی محاسبات، کاربردی نبوده و در عمل قابل استفاده نیست. در این مقاله دو روش جدید برای تعیین حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه پیشنهاد می‌شود. روش اول بر اساس استفاده از اصل ماکسیمم آنتروپی (حداکثر عدم قطعیت) و روش دوم بر اساس استنباط بیزی در فضای پارامتری مقید تحت شرط وجود یک رابطه ترتیبی است. روش‌های پیشنهادی با استفاده از معیارهای استاندارد با روش بیزی مقایسه شده و بهین بودن آنها در عمل نتیجه می‌شود. سرانجام حق بیمه‌های نسبی محاسبه شده با استفاده از روش‌های پیشنهادی با مقادیر مورد استفاده در سیستم پاداش - جریمه کشور مقایسه می‌شوند و نتایج، نیاز به تغییر سیستم فعلی را نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: اصل ماکسیمم آنتروپی، سیستم پاداش - جریمه، حق بیمه نسبی، فضای پارامتری مقید

۱. استادیار دانشگاه آزاد اسلامی (واحد رودهن) (نویسنده مسئول) Teimourian.m@riau.ac.ir

۲. دانشیار دانشگاه شهید بهشتی amirtpayandeh@gmail.com

۳. استاد دانشگاه شهید بهشتی m-vahidi@sbu.ac.ir

۱. مقدمه

منظور از سیستم‌های پاداش - جریمه در بیمه اتومبیل، روشی است که در آن حق بیمه برای بیمه‌گذار بر اساس تعداد، نوع و میزان خسارت‌های ادعا شده در طول دوره قبل محاسبه می‌شود. به عبارت ساده‌تر اگر بیمه‌گذار در طول دوره قبل ادعای خسارت نداشته باشد، حق بیمه او در دوره بعد شامل تخفیف یا اصطلاحاً پاداش می‌شود و اگر حداقل یک بار ادعای خسارت کرده باشد، حق بیمه او در دوره بعد شامل نوعی جریمه خواهد شد. به همین دلیل چنین سیستم‌هایی را سیستم‌های پاداش - جریمه می‌نامند. سیستم پاداش - جریمه مورد استفاده در بیمه شخص ثالث کشور در تمام شرکت‌های بیمه یکسان است. این سیستم برای خسارت‌های مالی و خسارت‌های جانی مقادیر جریمه متفاوتی نسبت می‌دهد. با در نظر گرفتن این مهم، می‌توان این سیستم را با ۱۵ سطح در نظر گرفت که سطوح از ۱ تا ۱۵ شماره‌گذاری شده‌اند. بیمه‌گذاران در سطح ۱ حداقل حق بیمه (حق بیمه نسبی برابر با ۰/۳) و در سطح ۱۵ حداکثر حق بیمه (حق بیمه نسبی برابر با ۲) را می‌پردازند. بیمه‌گذاران تازه‌وارد در سطح اولیه یعنی سطح ۹ قرار می‌گیرند و حق بیمه‌ای برابر با مقدار حق بیمه پایه (حق بیمه نسبی برابر ۱) می‌پردازند. قاعده تغییر وضعیت بیمه‌گذاران در جدول ۱ آمده است:

جدول ۱. سطح بیمه گذار در سال آینده

سطح قبلی بیمه گذار	تعداد خسارت ۰	تعداد خسارت مالی				تعداد خسارت جانی			
		۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱۴	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱۳	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱۲	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱۱	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱۰	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۹	۸	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۸	۷	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۷	۶	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۶	۵	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۵	۴	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۴	۳	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۳	۲	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۲	۱	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵
۱	۱	۱۰	۱۱	۱۲	۱۴	۱۱	۱۲	۱۳	۱۵

سیستم‌های پاداش- جریمه به دلیل کارایی و پیشگیری از بروز پدیده مخاطرات اخلاقی^۱ در بیمه از اهمیت بسیاری برخوردار است و قابلیت استفاده در تمام شاخه‌های بیمه‌ای را دارد. محاسبه حق بیمه نسبی و در نتیجه حق بیمه قابل پرداخت بیمه‌گذاران نیز از جمله مسائل مورد توجه در سیستم‌های پاداش-جریمه است. بنابراین ارائه برآوردگرهایی که با اضافه کردن جزئیات مربوط به قراردادهای بیمه در تحلیل، دقت زیادی داشته و به سادگی قابل محاسبه باشند، ضروری می‌نماید. بدیهی است هر چه

۱. مخاطرات اخلاقی بیمه‌گذاران زمانی رخ می‌دهد که اطلاعات بیمه‌گذاران نسبت به سابقه و توانایی رانندگی آنها بیشتر از شرکت بیمه‌گر باشد (برای اطلاعات بیشتر پینکویت و همکاران (۲۰۰۱) را ببینید).

بیشتر بتوانیم اطلاعات موجود در داده‌های پیشین را وارد مدل کنیم، فرضیات روش‌های ارائه‌شده به واقعیت نزدیک‌تر بوده و اطمینان به نتایج به دست آمده با این روش‌ها بیشتر خواهد بود. استفاده از اطلاعات مربوط به بیمه‌گذاران موجب شده است که حق‌بیمه به روش‌های بیزی محاسبه گردد که در ادامه مقاله به اختصار مرور خواهد شد. اما نتایج به دست آمده با استفاده از روش‌های بیزی به دلیل پیچیدگی محاسباتی آن قابل استفاده نیست. در این مقاله دو روش جدید برای محاسبه حق‌بیمه نسبی ارائه می‌شود به طوری که به سادگی قابل محاسبه بوده و خصوصیات مطلوب را دارد.

اولین روش پیشنهادی، تعیین حق بیمه با استفاده از اصل ماکسیمم آنتروپی^۱ است از اصل ماکسیمم آنتروپی برای مواردی استفاده می‌شود که هدف برآورد توزیع احتمال است به طوری که توزیع به دست آمده تحت قیدهای مسئله، بیشترین عدم قطعیت (ماکسیمم آنتروپی) را داشته باشد. اولین بار جینز^۲ توزیع احتمال با حداقل اربیی و تحت قیود خاص را با استفاده از ماکسیمم آنتروپی اندازه‌شانون $(-\sum p_i \ln(p_i))$ به دست آورد. منابع بسیاری از جمله زوگرافوس^۳ به بررسی ویژگی‌ها، کاربردها و تعمیم‌های روش آنتروپی پرداخته‌اند. همچنین این روش در بسیاری از شاخه‌های مختلف علوم مورد استفاده قرار گرفت که مرور جامعی از آن را می‌توان در کوور و توماس^۴ و پاردو^۵ یافت. استفاده از ماکسیمم آنتروپی در توابع مطلوبیت توسط جسوپ^۶، عباس^۷ و دارونه^۸ ارائه شده است. همچنین لاندزمن^۹

-
1. Maximum Entropy
 2. Jaynes, 1957
 3. Zografos, 2008
 4. Cover and Thomas, 2006
 5. Pardo, 2006
 6. Jessop, 1999
 7. Abbas, 2002 and 2006
 8. Daroonch, 2006 and 2004
 9. Landsman, 1999

و پاینده و همکاران^۱ از این روش در نظریه باورمندی استفاده کردند. کرواویچ و مرگل^۲ و ساچلاس و پاپانیا^۳ و مدل‌بندی توزیع شدت ادعاها را با استفاده از روش روش ماکسیمم آنتروپی بررسی کردند. گزیل و همکاران^۴ احتمال ورشکستگی را با استفاده از این اصل مورد مطالعه قرار دادند. در ادامه این مقاله نیز از اصل ماکسیمم آنتروپی برای تعیین حق بیمه نسبی در سیستم پاداش-جریمه استفاده خواهد شد.

روش دوم پیشنهادی، استفاده از رویکرد فضای پارامتری^۵ مقید است. در این روش با استفاده از ماهیت ترتیبی بودن پارامتر مخاطره نسبی برای بیمه‌گذاران در سطوح مختلف سیستم پاداش-جریمه، چگونگی برآورد حق بیمه‌های نسبی مورد بررسی قرار می‌گیرد. اوایل سال ۱۹۵۰ مسئله برآورد پارامترها در فضای پارامتری مقید را آیر و همکاران^۶ مطرح کردند. حالت کلی‌تر مسئله و شرایط وجود برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی در فضای پارامتری مقید در تحقیق ون-ادن^۷ مطالعه و الگوریتمی برای محاسبه آن ارائه شد. پس از آن بسیاری از نویسندگان برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی را برای توزیع‌های مختلف مورد بررسی قرار داده و روش محاسبه آن را بیان کردند. از مهم‌ترین مطالعات در رابطه با بررسی برآوردگر در فضای پارامتری مقید با استفاده از توابع زیان دیگری غیر از تابع زیان توان دوم خطا، می‌توان به کوباکاوا^۸، مارچاند و استراودمن^۹ و مارچاند و پاینده^{۱۰} اشاره کرد.

-
1. Payandeh et al., 2012
 2. Krvavych and Mergel, 2000
 3. Sachlas and Papaioannou, 2012
 4. Gzyl et al., 2013
 5. Constrained Parameter Space
 6. Ayer et al., 1955
 7. Van-Eden, 1956; 1957 a,b,c; 1958
 8. Kubokawa, 1994; 2005 a,b.
 9. Marchand Strawderman, 2004
 10. Marchand and Payandeh, 2011

کرد. گلفند و همکاران^۱ روش نمونه‌گیری گیبز^۲ را برای برآورد پارامترها پیشنهاد دادند. این روش به سادگی قابل استفاده بوده و نسبت به توزیع‌های پیشین پارامتر مخاطره نسبی انعطاف‌پذیر است. روش مورد استفاده در این مقاله برای محاسبه حق‌بیمه نسبی در فضای پارامتری مقید نیز روش نمونه‌گیری گیبز است. در ادامه به مقایسه حق‌بیمه‌های نسبی به دست آمده با استفاده از دو روش ماکسیمم آنترپی و فضای پارامتری مقید با حق‌بیمه‌های نسبی مورد استفاده در شرکت‌های بیمه و تحت شرایط مختلف می‌پردازیم.

۲. برآوردگر بیزی^۳ حق‌بیمه نسبی

در عمل یک سیستم پاداش-جریمه شامل s سطح است که با اعداد $1, 2, \dots, s$ شماره‌گذاری می‌شوند. در ابتدا بیمه‌گذار با توجه به مشخصات خود در یکی از سطوح قرار می‌گیرد و در سال‌های بعد با توجه به تعداد خسارت‌های گزارش شده او در طول دوره قبل، به سطح بالاتر یا پایین‌تر انتقال می‌یابد. بیمه‌گذاری که در پایین‌ترین سطح ($l=1$) قرار گیرد، کمترین حق‌بیمه و بیمه‌گذاری که در بالاترین سطح ($l=s$) قرار گرفته باشد، بیشترین حق‌بیمه را می‌پردازد. هر یک از سطوح سیستم پاداش-جریمه دارای حق‌بیمه نسبی است. اگر حق‌بیمه نسبی بیمه‌گذار در سطح l را با π_l نشان دهیم، حق بیمه هر سطح از ضرب حق‌بیمه نسبی در حق‌بیمه پایه (Π) محاسبه می‌شود. مقدار حق‌بیمه پایه بر اساس عوامل مخاطره‌ظاهری (مانند نوع اتومبیل، سن راننده، سن اتومبیل و ...) تعیین می‌شود.

در اغلب سیستم‌های پاداش-جریمه، اطلاع از سطح بیمه‌گذار و تعداد خسارت‌ها در طول دوره قبل برای تعیین سطح و مقدار حق‌بیمه او در آینده کافی است. بنابراین اگر تعداد خسارت‌های بیمه‌گذار در دوره‌های مختلف مستقل از هم باشند،

-
1. Gelfand et al., 1992
 2. Gibbs Sampling
 3. Bayesian Estimator

آنگاه سطح بیمه‌گذار در سیستم پاداش - جریمه، تشکیل یک زنجیر مارکوف را خواهد داد. با استفاده از خواص زنجیر مارکوف و ماتریس قاعده تغییر وضعیت سیستم، می‌توان احتمال تغییر وضعیت بیمه‌گذار از یک سطح به سطح دیگر در $(T + 1)$ - امین دوره پوشش بیمه‌ای را تعیین کرد.

اگرچه بیمه‌گذارانی که نسبت به سابقه و عوامل مخاطره‌ظاهری همانند هستند، همگی در یک سطح خاصی از سیستم قرار گرفته‌اند اما به دلیل وجود عوامل مخاطره غیر قابل مشاهده (مانند خلق و خو، سرعت عکس‌العمل، مهارت رانندگی و ...) گرایش به تصادف یکسانی ندارند. بنابراین برای تعیین حق بیمه عادلانه باید این عوامل غیر قابل مشاهده نیز در نظر گرفته شوند. گرایش به تصادف را با پارامتر θ نشان داده و پارامتر مخاطره نسبی می‌نامند. محاسبه حق بیمه نسبی و در نتیجه حق بیمه قابل پرداخت بیمه‌گذاران نیز از جمله مسائل مورد توجه در سیستم‌های پاداش - جریمه است. برآورد پارامتر مخاطره نسبی را حق بیمه نسبی در نظر می‌گیرند. با در نظر گرفتن یک توزیع پیشین مناسب برای پارامتر مخاطره نسبی و استفاده از استنباط بیزی، می‌توان حق بیمه نسبی را تعیین نمود. نوربرگ^۱ برای اولین بار از استنباط بیزی برای محاسبه حق بیمه نسبی استفاده نمود. در این روش مقدار حق بیمه نسبی بیمه‌گذار در سطح l تحت تابع زیان توان دوم خطا از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$r_l = E(\Theta | L = l) = \frac{\int_0^{+\infty} \theta \pi_l(\lambda \theta) d \pi_{\Theta}(\theta)}{\int_0^{+\infty} \pi_l(\lambda \theta) d \pi_{\Theta}(\theta)}, \quad l = 1, 2, \dots, s \quad (1)$$

- λ : متوسط فراوانی خسارت بیمه‌گذاران؛

- $\pi(\vartheta) = (\pi_1(\vartheta), \dots, \pi_s(\vartheta))$: توزیع احتمال مانای سیستم با متوسط فراوانی ϑ ؛

- π_{Θ} : توزیع پیشین پارامتر مخاطره نسبی.

مقدار حق بیمه نسبی در این روش به تابع توزیع پارامتر مخاطره نسبی وابسته است. توزیع معمول مورد استفاده برای پارامتر مخاطره نسبی، توزیع گاما است. همچنین می‌توان از توزیع‌های نامنفی لگ نرمال یا گاوسی وارون نیز برای مدل‌بندی استفاده نمود (Tremblay, 1992; Walhin and Paris, 1999).

علاوه بر عدم امکان تجاری بودن استفاده از روش‌های بیزی به دلیل پیچیدگی که در عمل قابل استفاده نیست، اگر از توابع زیانی غیر از تابع زیان توان دوم خطا استفاده شود، برآوردگر r_i در رابطه (۱) شکل بسته‌ای نخواهد داشت. با توجه به تعریف سیستم پاداش-جریمه، باید برآوردگرهای r_i نسبت به l توابع صعودی باشند که در بسیاری از مواقع برآوردگرهای بیزی چنین ویژگی را ندارند و در نتیجه سیستم عادلانه نیستند (Denuit et al., 2007).

۳. تعیین حق بیمه نسبی با استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی

مسئله‌ای را در نظر بگیرید که در آن امکان رخداد پیشامدهای متفاوتی با احتمال‌های متفاوت و تحت شرایط خاص وجود داشته باشد. با اینکه تمامی رخدادها معلوم است اما نمی‌توان پیشامدی را که در نهایت و تحت شرایط موجود، رخ خواهد داد، مشخص کرد. برای حل چنین مسئله‌ای باید تمامی امکانات و شرایط موجود را در نظر گرفت. یکی از روش‌های حل چنین مسائلی استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی است که در این بخش به آن اشاره می‌شود. در ابتدا تعریف آنتروپی بیان می‌شود.

تعریف ۱: فرض کنید p یک توزیع احتمال گسسته بر مجموعه متناهی $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ باشد به طوری که $p_i = p(x_i)$. آنتروپی p برابر است با:

$$H(p) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$$

در واقع هر چه آنتروپی ($H(p)$) بیشتر باشد، اطلاعات کمتر (عدم قطعیت بیشتر) خواهد بود. برای برآورد توزیع احتمال با ماکسیمم آنتروپی و تحت شرایط خاص از لم زیر استفاده می شود.

لم ۱: فرض کنید متغیر تصادفی گسسته X با مقادیر x_1, x_2, \dots, x_n و احتمال‌های p_1, p_2, \dots, p_n باشد. همچنین فرض کنید تابع احتمال این متغیر تصادفی در شرایط g_1, g_2, \dots, g_m صدق می کند به طوری که:

$$\sum_{i=1}^n p_i g_r(x_i) = a_r$$

$$r = 1, 2, \dots, m$$

در این صورت ضریب لاگرانژ تحت شرایط g_1, g_2, \dots, g_m به ازای $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ های خاص برابر است با:

$$\ell = -\sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) - \sum_{r=1}^m \lambda_r \left[\sum_{i=1}^n p_i g_r(x_i) - a_r \right]$$

اصل ماکسیمم آنتروپی از محاسبه ضرایب لاگرانژ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ و توزیع احتمال متغیر تصادفی X به طوری که ℓ ماکسیمم شود، به دست می آید. در واقع این روش با معرفی چند متغیر جدید متناسب با تعداد قیدهای مسئله، تعیین توزیع احتمال را ساده تر می نماید، به طوری که احتمال‌ها به صورت توابعی از ضرایب لاگرانژ تبدیل شده و از حل یک دستگاه معادلات ساده به دست می آیند. آنتروپی به طور پیوسته مشتق پذیر و مقعر بوده و همچنین قیدهای مسئله خطی و به طور پیوسته مشتق پذیر هستند؛ لذا بنا به قضیه کوهن-توکر^۱ توزیع احتمال حاصل، یکتاست^۲.

در ادامه با استفاده از اصل ماکسیمم آنتروپی، روشی برای محاسبه حق بیمه نسبی در سیستم پاداش-جریمه ارائه می شود. فرض کنید $M_I(t)$ متغیر تصادفی تعداد

بیمه‌گذاران در سطح l -ام، $l=1,2,\dots,s$ ، و $U(t) = \prod_{l=1}^s r_l M_l(t)$ مجموع درآمد حاصل از حق بیمه‌ها تا زمان t هستند. یکی از پرکاربردترین روش‌ها برای محاسبه حق بیمه نسبی، روش بیزی است که در بخش مقدمه به آن اشاره شد. حق بیمه نسبی محاسبه شده با استفاده از روش بیزی و رابطه (۱) را با نماد r_l^{Bays} و مجموع درآمد حاصل از حق بیمه‌ها را با نماد $U^{Bays}(t)$ نمایش می‌دهیم. از لحاظ نظری استفاده از روش بیزی در محاسبه حق بیمه نسبی مورد قبول است. اما این روش به دلیل مشکلات بیان شده قابل استفاده نیست. گیلد و ساندت^۱ برآوردگر خطی بسیار ساده‌ای به صورت زیر معرفی کردند:

$$r_l^{Lin} = \alpha + \beta l; \quad l=1,\dots,s$$

که در آن مقادیر α و β از مینیمم کردن امید تابع زیان توان دوم خطا، $E((r^{Lin} - \Theta)^2)$ ، به دست می‌آیند. فرض کنید $U^{Lin}(t)$ مجموع درآمد حاصل از حق بیمه‌هایی است که با استفاده از روش برآوردگر خطی به دست می‌آیند. می‌توان مقادیر α و β را به گونه‌ای محاسبه نمود که مقدار $U^{Lin}(t)$ تا حد ممکن به مقدار $U^{Bay}(t)$ نزدیک بوده و همچنین دارای حداکثر عدم قطعیت باشد. چنین برآوردگری را برآوردگر ماکسیمم آنتروپی نامیده و برای محاسبه آن از قضیه ۱ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱: سیستم پاداش-جریمه با s سطح را در نظر بگیرید. فرض کنید r_l^{Bay} و r_l^{Lin} به ترتیب برآوردگر بیزی و برآوردگر خطی حق بیمه نسبی باشند. اگر

$$E(U^{Bays}(t)M^*(t))E(M(t)M^*(t)) < E(U^{Bays}(t)M(t))E(M^*(t)^2)$$

آنگاه برآوردگر ماکسیمم آنتروپی برای حق بیمه نسبی برابر است با

$$r_l^{Lin} = \alpha_{opt} + \beta_{opt} l \text{ به طوری که:}$$

$$\alpha_{opt} = \frac{E(U^{Bays}(t)M(t))}{E(M^2(t))}(1-\omega)$$

$$\beta_{opt} = \frac{E(U^{Bays}(t)M(t))}{E(M^*(t)^2)}\omega$$

$$\omega = \frac{E(U^{Bays}(t)M(t))E(M(t)M^*(t))^2 - E(M^2(t))E(U^{Bays}(t)M^*(t))E(M(t)M^*(t))}{E(U^{Bays}(t)M(t))E(M(t)M^*(t))^2 - E(U^{Bays}(t)M(t))E(M^2(t))E(M^*(t)^2)}$$

و

$$M^*(t) = \sum_{l=1}^s lM_l(t), \quad M(t) = \sum_{l=1}^s M_l(t)$$

این برآوردگر دارای ماکسیمم آنتروپی شانون و حداقل میانگین توان دوم تفاضل مجموع درآمد حق بیمه‌ها با روش بیزی است.

برهان: اثبات این قضیه در دو مرحله زیر ارائه می‌شود.

ابتدا از $E(U^{Bays}(t) - U^{Lin}(t))^2$ نسبت به α و β مشتق گرفته شده و دو تابع زیر به دست می‌آید:

$$f_1(\alpha, \beta) = \frac{\alpha E(M^2(t)) + \beta E(M(t)M^*(t))}{E(U^{Bays}(t)M(t))} - 1$$

$$f_2(\alpha, \beta) = \alpha E(M(t)M^*(t)) + \beta E(M^*(t)^2) - E(U^{Bays}(t)M^*(t))$$

سپس از اصل ماکسیمم آنتروپی شانون با شرایط $f_1(\alpha, \beta) = 0$ و $f_2(\alpha, \beta) = 0$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \ell = & -\frac{\alpha E(M^2(t))}{E(U^{Bays}(t)M(t))} \ln\left(\frac{\alpha E(M^2(t))}{E(U^{Bays}(t)M(t))}\right) \\ & -\frac{\beta E(M(t)M^*(t))}{E(U^{Bays}(t)M(t))} \ln\left(\frac{\beta E(M(t)M^*(t))}{E(U^{Bays}(t)M(t))}\right) \\ & -\lambda_1 f_1(\alpha, \beta) - \lambda_2 f_2(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از تابع ℓ نسبت به α ، β ، λ_1 و λ_2 روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\alpha = \frac{E(U^{Bays}(t)M(t))}{E(M^2(t))} \exp\{-1 - \lambda_1 E(U^{Bays}(t)M(t)) - \lambda_2 \frac{E(U^{Bays}(t)M(t))E(M^2(t))E(M(t)M^*(t))}{E(M^2(t))}\}$$

$$\beta = \frac{E(U^{Bays}(t)M(t))}{E(M(t)M^*(t))} \exp\{-1 - \lambda_1 E(U^{Bays}(t)M(t)) - \lambda_2 \frac{E(U^{Bays}(t)M(t))E(M^{*2}(t))}{E(M(t)M^*(t))}\}$$

$$\alpha E(M^2(t)) + \beta E(M(t)M^*(t)) - E(U^{Bays}(t)M(t)) = 0$$

$$\beta E(M^{*2}(t)) + \alpha E(M(t)M^*(t)) - E(U^{Bays}(t)M^*(t)) = 0$$

مقادیر α و β مطلوب مسئله از ساده کردن روابط بالا حاصل می‌شود. تنها شرط لازم برای جواب داشتن مسئله شرط $0 < \omega < 1$ است. این شرط معادل است با:

$$E(U^{Bays}(t)M^*(t))E(M(t)M^*(t)) < E(U^{Bays}(t)M(t))E(M^{*2}(t))$$

در ادامه مقادیر حق بیمه نسبی را برای سیستم پاداش - جریمه مورد استفاده ایران با استفاده از روش بیزی و روش ماکسیمم آنتروپی محاسبه و با استفاده از معیارهای مناسب مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

برای محاسبه مقادیر حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه ایران با استفاده از هر دو روش بیزی و ماکسیمم آنتروپی، فرایند تعداد بیمه‌گذاران حاضر در سیستم در زمان t و سطح l ام، $M_l(t)$ ، فرایند پواسون با پارامتر $\mu = 0/9$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین پارامتر مخاطره نسبی، Θ ، دارای توزیع پیشین گاما $\Gamma(1,1)$ است. بنا به گزارشات مربوط به تحلیل سیستم پاداش - جریمه ایران (پاینده، ۱۳۹۳)، متوسط فراوانی خسارت‌ها برابر $0/0752$ ، متوسط فراوانی خسارت‌های مالی بیمه‌گذاران برابر $\lambda_1 = 0/0683568$ و متوسط فراوانی خسارت‌های جانی بیمه‌گذاران برابر $\lambda_2 = 0/00677$ است.

مقادیر حق بیمه نسبی برای سیستم پاداش - جریمه ایران با استفاده از دو روش بیزی (رابطه (۱)) و روش ماکسیمم آنتروپی (قضیه ۱) محاسبه و در جدول ۲ آمده است.

با توجه به اینکه سطح ۹، سطح اولیه سیستم بوده و بیمه گذاران فقط در ابتدای ورود به سیستم در این سطح قرار می گیرند، احتمال حضور در این سطح برای سال های بعد برابر صفر است. مقدار حق بیمه بیزی برای این سطح برابر ۱ در نظر گرفته شده است.

جدول ۲. مقادیر حق بیمه نسبی محاسبه شده با دو روش بیزی و ماکسیمم آنتروپی در

سیستم پاداش جریمه ایران

سطح	روش بیزی	روش ماکسیمم آنتروپی
۱	۰/۶۲۰۶	۰/۴۶۶۰
۲	۱/۲۷۳۲	۰/۷۲۴۰
۳	۱/۳۳۸۴	۰/۹۸۲۰
۴	۱/۴۱۰۸	۱/۲۴
۵	۱/۴۹۱۶	۱/۴۹۸۱
۶	۱/۵۸۲۶	۱/۷۵۶۱
۷	۱/۶۸۵۹	۲/۰۱۴۱
۸	۱/۸۰۴۲	۲/۲۷۲۱
۹	۱	۲/۵۳۰۱
۱۰	۱/۸۷۲۰	۲/۷۸۸۱
۱۱	۲/۲۸۶۰	۳/۰۴۶۱
۱۲	۱	۳/۳۰۴۱
۱۳	۳/۹۷۳۱	۳/۵۶۲۱
۱۴	۴/۶۸۰۱	۳/۸۲۰۱
۱۵	۴/۹۶۹۱	۴/۰۷۸۱

برای مقایسه روش های تعیین حق بیمه نسبی با استفاده از روش بیزی و روش ماکسیمم آنتروپی در سیستم پاداش - جریمه ایران از دو معیار استفاده خواهیم کرد. اولین معیار، معیار کارایی است که مقیاسی برای اندازه گیری عادلانه بودن

حق بیمه‌های دریافتی است، زیرا انتظار داریم با افزایش نسبی فراوانی خسارت‌های بیمه‌گذار، مقدار حق بیمه او نیز به همان نسبت افزایش یابد و برعکس. نرخ افزایش به مفهوم کارایی وابسته است که توسط لومیرانتا^۱ معرفی و به نام کارایی لومیرانتا معروف شد. این معیار به صورت زیر محاسبه می‌شود.

فرض کنید λ متوسط فراوانی خسارت‌های بیمه‌گذار در یک سیستم پاداش -

جریمه و $\bar{R}(\lambda) = \sum_{i=1}^s r_i \pi_i(\lambda)$ متوسط حق بیمه پرداختی بیمه‌گذار باشد. در این

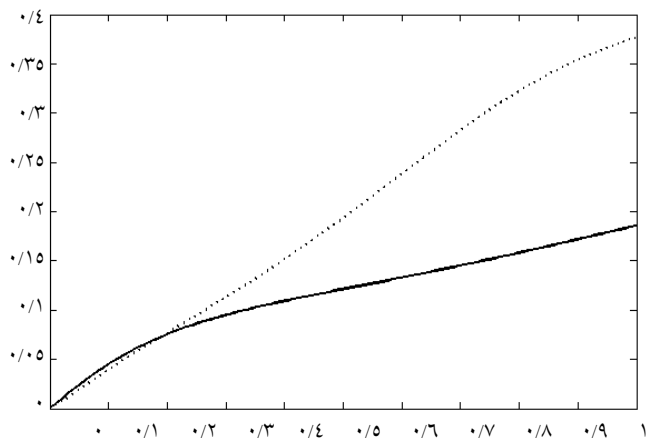
صورت کارایی لومیرانتا، Ξ ، برابر است با:

$$\Xi(\lambda) = \frac{d \ln(\bar{R}(\lambda))}{d \ln(\lambda)} = \frac{\lambda d \bar{R}(\lambda)}{\bar{R}(\lambda)}$$

معیار دومی که برای مقایسه روش ماکسیمم آنتروپی و روش بیزی حق بیمه نسبی استفاده می‌شود، ضریب تغییرات، CV ، است. ضریب تغییرات از تقسیم انحراف استاندارد حق بیمه‌ها بر میانگین حسابی حق بیمه‌ها به دست می‌آید. ضریب تغییرات، معیاری برای اندازه‌گیری میزان سختگیری سیستم پاداش - جریمه است. بدین معنی که هر چه مقدار این معیار بیشتر شود آنگاه نتیجه می‌شود که سیستم پاداش - جریمه نسبت به بیمه‌گذاران پرخطر رفتار سخت‌گیرانه‌تری دارد.

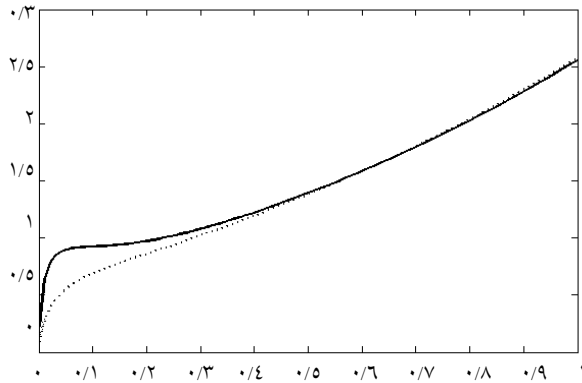
برای مقایسه روش‌های تعیین حق بیمه نسبی، مقادیر دو معیار کارایی لومیرانتا و ضریب تغییرات به ازای مقادیر مختلف فراوانی تعداد خسارت‌ها، $\lambda \in [0, 1]$ ، محاسبه شده و روشی که مقادیر این دو معیار برای آن بیشتر باشد به عنوان روش بهتر معرفی می‌شود. برای مقایسه مقادیر این دو معیار برای هر دو روش به ازای $\lambda \in [0, 1]$ محاسبه و به ترتیب در نمودار ۱ و ۲ رسم شده‌اند.

نمودار ۱. کارایی برآوردگر ماکسیمم آنتروپی (خطوط ممتد) و برآوردگر بیزی (نقطه چین) در سیستم پاداش جریمه ایران



طبق نمودار ۱ اگر متوسط تعداد خسارت‌ها کمتر از ۰/۲ باشد، کارایی روش ماکسیمم آنتروپی بیشتر از کارایی روش بیزی خواهد بود. در عمل نیز متوسط تعداد خسارت‌ها عددی در بازه ۰/۰۷ و ۰/۱۲ (میانگین ۰/۱۰) است و بیمه کردن پیشامدی با متوسط فراوانی وقوع بیش از ۰/۲۰ منطقی نیست (Park et al., 2010). لذا محاسبه حق بیمه نسبی با روش ماکسیمم آنتروپی علاوه بر اینکه به سادگی قابل محاسبه است، در عمل نیز کارایی بیشتری نسبت به حق بیمه بیزی دارد.

نمودار ۲. ضریب تغییرات برآوردگر ماکسیمم آنتروپی (خطوط ممتد) و برآوردگر بیزی (نقطه چین) در سیستم پاداش جریمه ایران



نمودار ۲ نیز بیانگر شدت سخت‌گیری سیستم‌های پاداش - جریمه ایران در صورت استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی و روش بیزی است. با توجه به نمودار ۲ می‌توان نتیجه گرفت که به ازای متوسط فراوانی کمتر از ۰/۸، ضریب تغییرات حق بیمه‌های نسبی با روش ماکسیمم آنتروپی از ضریب تغییرات حق بیمه‌های نسبی با روش بیزی بیشتر بوده و لذا بازدارندگی بیشتری را برای گرایش به تصادف در بین بیمه‌گذاران تضمین می‌کند.

۴. تعیین حق بیمه نسبی با استفاده از فضای پارامتری مقید

می‌توان برای هر یک از سطوح سیستم، یک پارامتر گرایش به تصادف (پارامتر مخاطره نسبی) در نظر گرفت. پارامتر مخاطره نسبی بیمه‌گذار سطح l ام را با θ_l نشان می‌دهیم. بدیهی است رابطه زیر برای پارامترهای مخاطره نسبی این سیستم برقرار است:

$$\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_s$$

فرض کنید متغیر تصادفی N_l تعداد خسارت‌های بیمه‌گذار سطح l -م در طول دوره پوشش بیمه‌ای باشد. متغیرهای تصادفی N_1, N_2, \dots, N_s به شرط پارامترهای مخاطره نسبی، $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ ، مستقل هستند اما پارامترهای مخاطره نسبی وابسته به

هم هستند. به طور معمول مقدار حق بیمه نسبی هر سطح از برآورد پارامتر مخاطره نسبی آن سطح به دست می آید. در هر سیستم پاداش - جریمه مقادیر مشخصی برای حداکثر پاداش و حداکثر جریمه بیمه گذاران در سیستم وجود دارد. اگر حداکثر پاداش را با نماد a و حداکثر جریمه را با نماد b نشان دهیم، هدف برآورد پارامترهای مخاطره نسبی است به طوری که:

$$a < \hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2 < \dots < \hat{\theta}_s < b \quad (2)$$

فرض کنید $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_s)$ بردار تعداد خسارت‌ها، $f_{\mathbf{N}}(n | \lambda, \Theta)$ توزیع شرطی بردار \mathbf{N} به شرط بردار پارامتر مخاطره نسبی و $\pi(\Theta | \mu)$ توزیع پیشین بردار پارامتر مخاطره نسبی باشد. امید پسین بردار پارامتر مخاطره پسین به شرط اطلاع از تعداد خسارت‌های سال قبل، برآوردگر معمول حق بیمه نسبی خواهد بود. روش مورد استفاده برای محاسبه حق بیمه نسبی، روش نمونه‌گیری گیبز از توزیع پسین بردار Θ است که گلفند و همکاران^۱ آن را برای تولید نمونه از توزیع پسین بردار Θ معرفی کرده‌اند. طبق این روش:

$$\pi(\theta_l | \mathbf{N}, \lambda, \mu, \Theta_j, j \neq l) \propto f_{\mathbf{N}}(n | \lambda, \Theta) \pi(\Theta | \mu), \quad (3)$$

که در آن:

$$\Theta_j = \{\theta_k, k \neq j\}$$

این روش موجب سهولت در نمونه‌گیری و برآورد پارامترها می‌شود. توزیع پیشین مورد استفاده برای بردار پارامترهای مخاطره نسبی، $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ ، توزیع چند متغیره گامای مقید است. این توزیع پرکاربردترین توزیع پیشین مورد استفاده برای پارامتر مخاطره نسبی در سیستم‌های پاداش - جریمه است. البته پارامترهای توزیع پیشین باید به نحوی انتخاب شود که شرط تعادل، متوسط پارامتر مخاطره نسبی برابر با یک، برقرار باشد. در ادامه الگوریتم گیبز برای تولید نمونه از توزیع پسین (۳) بیان می‌شود.

۱-۴. الگوریتم گیبز برای نمونه‌گیری تحت شرط (۲)

نمونه تصادفی به اندازه m از توزیع (۳) و تحت شرط (۲) با استفاده از

نمونه‌گیری گیبز و به صورت زیر تولید می‌شود:

- ابتدا $i=0$ و مقدار اولیه $\Theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_s^{(0)})$ را برای بردار پارامتر

مخاطره نسبی در نظر می‌گیریم؛

- به ازای هر $i < m$ مراحل زیر را تکرار می‌کنیم.

- $i = i + 1$

- نمونه تصادفی از توزیع شرطی (۳) به صورت زیر تولید می‌کنیم:

$$\theta_1^{(i)} \sim \pi(\theta | N_1, a, \theta_2^{(i-1)}, \dots, \theta_s^{(i-1)}) I_{(a, \theta_2^{(i-1)})}(\theta)$$

$$\theta_2^{(i)} \sim \pi(\theta | N_2, \theta_1^{(i)}, \theta_3^{(i-1)}, \dots, \theta_s^{(i-1)}) I_{(\theta_1^{(i)}, \theta_3^{(i-1)})}(\theta)$$

⋮

$$\theta_s^{(i)} \sim \pi(\theta | N_s, \theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}, \dots, \theta_{s-1}^{(i)}, b) I_{(\theta_{s-1}^{(i)}, b)}(\theta)$$

- نمونه‌های تولیدی در الگوریتم نسبت به مقادیر اولیه الگوریتم حساس نبوده و

مقدار حقیقه نسبی سطح l - ام به ازای $l = 1, 2, \dots, s$ نیز با استفاده از

$$\hat{E}(\theta_l) = \frac{\sum_{i=1}^m \theta_l^{(i)}}{m}$$

برآورد می‌شود.

برای تشخیص هم‌گرایی، از معیار همگرایی گلמן و روبین^۱ استفاده شده است. این

آزمون تشخیصی از فاکتور کاهش مقیاس پتانسیل (PSRF) برای تشخیص

همگرایی پارامترهای مدل استفاده می‌کند. برای محاسبه، ابتدا c زنجیر موازی با

مقادیر اولیه متفاوت و هر یک با m تکرار تولید می‌کنیم. فاکتور کاهش مقیاس

پتانسیل از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$PSRF = \sqrt{\frac{m-1}{m} + \frac{B(c+1)}{cmW}}$$

$$- \frac{B}{m} = \frac{1}{c-1} \sum_{j=1}^c (\bar{\theta}_j - \bar{\theta})^2 \quad \text{واریانس بین زنجیرها؛}$$

$$- W = \frac{1}{c(m-1)} \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^m (\theta_{ij} - \bar{\theta}_j)^2 \quad \text{واریانس درون زنجیرها؛}$$

$$- \theta_{ij} \quad \text{عضو } i \text{ ام از زنجیر } j \text{ ام؛}$$

$$- \bar{\theta}_j \quad \text{میانگین زنجیر } j \text{ ام.}$$

اگر زنجیر به توزیع مشخصی همگرا باشد، تغییرهای بین زنجیر نسبت به تغییرهای درون زنجیر کمتر بوده و لذا مقدار فاکتور کاهش مقیاس پتانسیل نزدیک به عدد یک خواهد بود. برعکس، مقادیر فاکتور بزرگتر از عدد یک بیانگر عدم وجود همگرایی است. اگر توزیع پسین (۳) شکل بسته‌ای نداشته باشد، از الگوریتم پذیرش - رد برای تولید نمونه استفاده می‌کنیم.

در ادامه مقدار حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه ایران را با استفاده از الگوریتم گیبز محاسبه می‌کنیم. حداکثر مقدار پاداش و حداکثر مقدار جریمه در سیستم پاداش - جریمه ایران به ترتیب برابر $a = 0.3$ ، $b = 2$ است. هدف برآورد پارامتر مخاطره نسبی سطح l -م تحت شرط (۲) است و برای انجام مقایسه مقدار پارامترهای مخاطره نسبی بدون شرط (۲) نیز برآورد می‌شوند.

بنا به تحقیق پاینده (۱۳۹۳)، بردار تعداد خسارت‌ها، $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_s)$ ، به شرط بردار پارامتر مخاطره نسبی، دارای توزیع شرطی مستقل پواسون به صورت زیر:

$$f(\mathbf{N} | \lambda, \Theta) = \prod_{l=1}^s P(N_l = n | \lambda, \theta_l) = \prod_{l=1}^s \frac{\exp(-\lambda \theta_l) (\lambda \theta_l)^n}{n!} \quad l = 1, 2, \dots, s$$

با پارامتر $\lambda = 0.0752$ است. همچنین بردار پارامتر مخاطره نسبی دارای توزیع پیشین چند متغیره گاما است که تحت شرط (۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$\pi(\Theta) = d_s(\delta_1, \dots, \delta_s; \gamma_1, \dots, \gamma_s) \prod_{l=1}^s \frac{\theta_l^{\delta_l-1} \exp(-\theta_l)}{\gamma_l^{\delta_l} \Gamma(\delta_l)} I_{(\theta_{l-1}, \theta_{l+1})}$$

به طوری که d_s مقدار ثابت برای شرط چگالی بودن و δ_l, γ_l پارامترهای توزیع پیشین چند متغیره گامای مقید، $\theta_0 = a$ و $\theta_{s+1} = b$ است. در این صورت توزیع پسین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi(\Theta | \mathbf{N}, \lambda, \delta_1^*, \dots, \delta_s^*; \gamma_1^*, \dots, \gamma_s^*) \\ = d_s^*(\delta_1^*, \dots, \delta_s^*; \gamma_1^*, \dots, \gamma_s^*) \prod_{l=1}^s \frac{\theta_l^{\delta_l^*-1} \exp(-\theta_l^*)}{(\gamma_l^*)^{\delta_l^*} \Gamma(\delta_l^*)} I_{(\theta_{l-1}, \theta_{l+1})}$$

به طوری که: $\gamma_l^* = \frac{1}{\gamma_l + \lambda}$ و $\delta_l^* = \delta_l + N_l$

برای برآورد حق بیمه نسبی با این روش نمونه‌ای تصادفی به اندازه $m = 100,000$ از این توزیع پسین به ازای $\delta_l = 1$ ، $\gamma_l = 1$ تولید شده و سپس مقادیر حق بیمه نسبی را برای سیستم پاداش - جریمه ایران محاسبه و در جدول ۳ آمده است. مقادیر فاکتور کاهش مقیاس پتانسیل (PSRF) در جدول بیانگر وجود همگرایی در نمونه‌های تولید شده است.

جدول ۳. نتایج برآورد پارامترهای مخاطره نسبی با استفاده از فضای پارامتری مقید تحت

توزیع پیشین گامای مقید با پارامترهای $\delta_i = 1$ و $\gamma_i = 1$ و $\lambda = 0.0752$

سطح	حق بیمه نسبی برآورد شده	PSRF
۱	۰/۳	۰/۹۹۹
۲	۰/۳۷۷	۰/۹۹۹
۳	۰/۴۶۰	۱/۰۰۰
۴	۰/۵۵۰	۰/۹۹۹
۵	۰/۶۴۷	۱/۰۰۰
۶	۰/۷۵۳	۱/۰۰۰
۷	۰/۸۷۴۱	۱/۰۰۰
۸	۱	۱/۰۰۰
۹	۱/۱۴۵	۱/۰۰۰
۱۰	۱/۳۱۰	۱/۰۰۰
۱۱	۱/۴۷۷	۰/۹۹۹
۱۲	۱/۶۳۳	۰/۹۹۹
۱۳	۱/۷۶۹	۰/۹۹۹
۱۴	۱/۸۹۲	۰/۹۹۹
۱۵	۲	۱/۰۰۰

۵. مقایسه سه روش تعیین حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه

ایران با مقادیر مورد استفاده در شرکت های بیمه

برآوردگر به دست آمده با استفاده از روش بیزی یک برآوردگر منطقی و علمی برای تعیین حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه است. همچنین در بخش های قبل دو روش جدید برای محاسبه حق بیمه نسبی بر اساس تئوری های معتبر آماری معرفی شد. روش ماکسیمم آنتروپی، برآوردگری خطی با حداکثر عدم قطعیت برای تعیین حق بیمه نسبی بود. از مزایای این برآوردگر می توان به سادگی محاسبات،

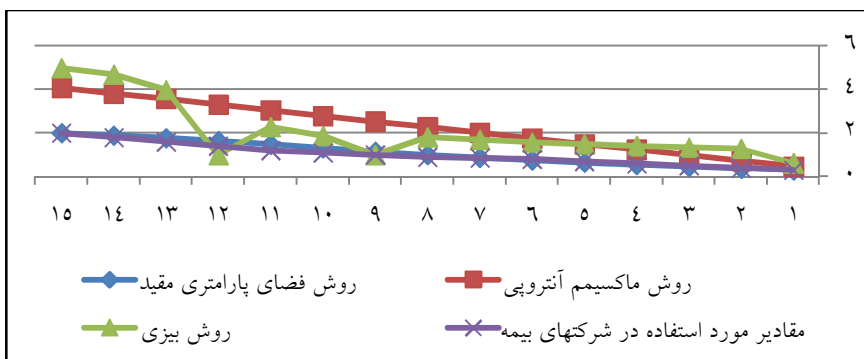
نزدیکی به برآوردگر بیز (برآوردگر منطقی حق بیمه نسبی) و حداقل استفاده از اطلاعات غیر تضمینی (حداکثر عدم قطعیت) اشاره نمود.

روش دوم، تعیین حق بیمه نسبی با استفاده از فضای پارامتری مقید است. مهم‌ترین مزیت این روش حفظ شرط ترتیبی بودن حق بیمه‌های نسبی محاسبه شده برای سطوح سیستم پاداش - جریمه در رویکرد بیزی است. همچنین برنامه‌نویسی و محاسبه آسان و انعطاف‌پذیری نسبت به مفروضات سیستم از دیگر مزایای این روش هستند.

در سیستم پاداش - جریمه مورد استفاده در ایران نیز حق بیمه‌های نسبی سطوح مختلف محاسبه و توسط بیمه مرکزی ج.ا.ا. منتشر می‌شود. سؤالی که در ادامه پیش می‌آید این است که استفاده از این دو روش برای تعیین حق بیمه نسبی چه مزیتی دارد. در ادامه مقدار حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه ایران به ازای سه مقدار مختلف برای متوسط فراوانی خسارت‌ها محاسبه و مورد مقایسه قرار می‌گیرد. با توجه به حق بیمه‌های نسبی اعلام شده توسط بیمه مرکزی ج.ا.ا. مقدار حداقل حق بیمه نسبی ۳۰٪ و حداکثر آن ۲۰٪ است. همچنین سطح ۹، سطح اولیه سیستم بوده و بیمه‌گذاران فقط در ابتدای ورود به سیستم در این سطح قرار می‌گیرند لذا احتمال حضور در این سطح برای سال‌های بعد برابر صفر است. مقدار حق بیمه بیزی برای این سطح برابر یک در نظر گرفته شده است.

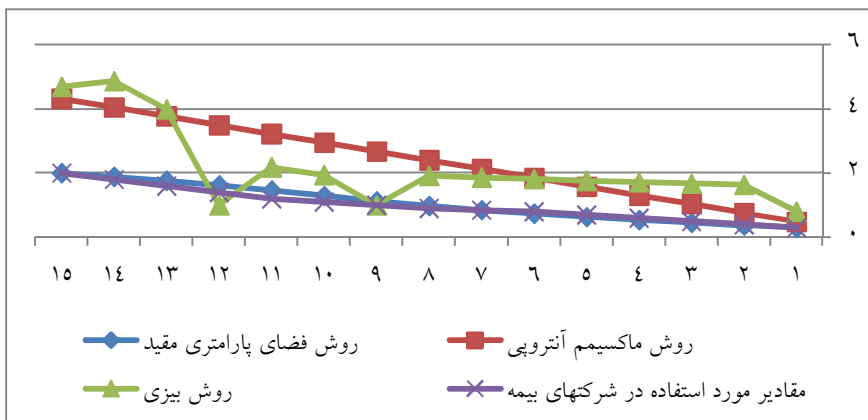
- حالت اول: بنا به تحقیق پاینده (۱۳۹۳) متوسط فراوانی خسارت برابر $7/052$ ٪ است. مقدار حق بیمه نسبی به ازای $\lambda = 0/0752$ با استفاده از هر سه روش پیشنهادی محاسبه و در نمودار ۳ درج شده است.

نمودار ۳. مقدار حق بیمه نسبی با استفاده از روش های بیزی، ماکسیمم آنتروپی و فضای پارامتری مقید در مقابل مقادیر مورد استفاده در شرکت های بیمه به ازای $\lambda = 0.0752$



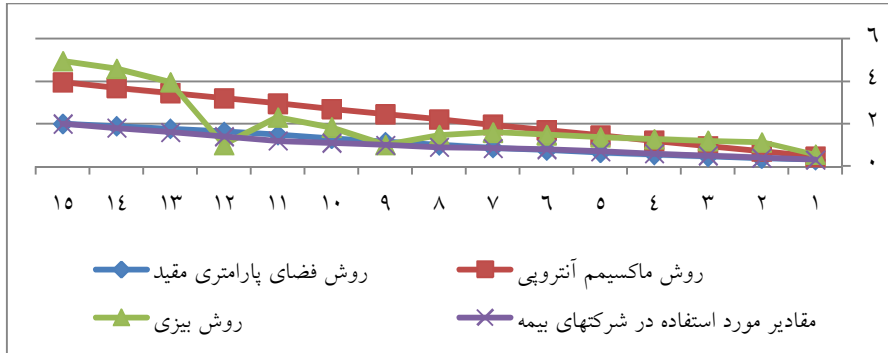
- حالت دوم: در این حالت مقدار متوسط فراوانی خسارت را کمتر از مقدار اول و برابر ۳٪ در نظر گرفته و مقدار حق بیمه نسبی با استفاده از هر سه روش پیشنهادی محاسبه و در نمودار ۴ درج شده است.

نمودار ۴. مقدار حق بیمه نسبی با استفاده از روش های بیزی، ماکسیمم آنتروپی و فضای پارامتری مقید در مقابل مقادیر مورد استفاده در شرکت های بیمه به ازای $\lambda = 0.03$



- حالت سوم: در این حالت مقدار متوسط فراوانی خسارت را بیشتر از مقدار اول و برابر ۱۰٪ در نظر گرفته و مقدار حق بیمه نسبی با استفاده از هر سه روش پیشنهادی محاسبه و در نمودار ۵ رسم شده است.

نمودار ۵. مقدار حق بیمه نسبی با استفاده از روش‌های بیزی، ماکسیمم آنتروپی و فضای پارامتری مقید در مقابل مقادیر مورد استفاده در شرکت‌های بیمه به ازای $\lambda = 0.1$



با توجه به اینکه در روش فضای پارامتری مقید، مقادیر حداقل و حداکثر حق بیمه نسبی به ترتیب ۳۰٪ و ۲۰٪ استفاده شده است، مقدار حق بیمه‌های نسبی با استفاده از این روش در هر سه حالت بسیار نزدیک به مقادیر مورد استفاده در شرکت‌های بیمه است، با این تفاوت که این مقادیر بر اساس تئوری‌های معتبر علمی محاسبه می‌شوند. همچنین این مقادیر نسبت به مقادیر متفاوت متوسط فراوانی ادعا (λ) حساس بوده و در صورت تغییر مقدار آن در سیستم، به راحتی به روز شده و لذا قابل اعتمادتر هستند. همچنین مقادیر حق بیمه نسبی با استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی و روش بیزی بیشتر از دو روش دیگر است. مقادیر به دست آمده با استفاده از روش ماکسیمم آنتروپی علاوه بر خاصیت صعودی بودن، به دلیل وجود رابطه خطی دارای مزیت سادگی هستند. همچنین این مقادیر تنها بر اساس اطلاعات موجود (قیدهای مسئله) محاسبه می‌شود.

بنا به مقادیر حق بیمه نسبی مورد استفاده در شرکت‌های بیمه، تنها بیمه‌گذاران سطوح ۱۰ الی ۱۵ مشمول پرداخت جریمه در حق بیمه‌های خود هستند. این درحالی است که بنا به مقادیر حق بیمه‌های نسبی محاسبه شده در هر سه روش بیزی، ماکسیمم آنتروپی و فضای پارامتری مقید، تعداد سطوح جریمه بیشتر از پنج سطح مورد استفاده در شرکت‌های بیمه است. بنابراین به نظر می‌رسد در نظر گرفتن

پنج سطح جریمه در مقابل نه سطح پاداش در سیستم پاداش - جریمه منطقی نیست. لذا می توان با در نظر گرفتن این مطلب، سیستم پاداش - جریمه ای با تعداد سطوح بیشتر در نظر گرفت. همچنین در سیستم پاداش - جریمه مورد استفاده، سطح بیمه گذار تنها زمانی اهمیت دارد که خسارتی در طول سال گزارش نکرده باشد. در صورت گزارش خسارت توسط بیمه گذار، شماره سطح بیمه گذار در طول پوشش بیمه ای هیچ تأثیری در میزان جریمه و در نتیجه حق بیمه سال آینده وی نخواهد داشت. این مسئله خاصیت تشویق بیمه گذاران برای رانندگی با احتیاط بیشتر و بازدارندگی از وقوع خسارت را در سیستم پاداش - جریمه کمتر خواهد نمود.

۶. نتیجه گیری

در این مقاله دو روش جدید برای محاسبه حق بیمه نسبی ارائه شد. در روش اول با استفاده از اصل ماکسیمم آنتروپی یک برآوردگر خطی با حداکثر عدم قطعیت برای تعیین حق بیمه نسبی معرفی شد. این برآوردگر به سادگی قابل استفاده بوده و برای محاسبه آن از حداقل اطلاعات غیر تضمینی (حداکثر عدم قطعیت) استفاده می شود. بنا بر معیار کارایی لومیرانتا، در عمل برآوردگر ماکسیمم آنتروپی کارایی بیشتری دارد و بنا به معیار ضریب تغییرات، بازدارندگی بیشتری را برای گرایش به تصادف در بین بیمه گذاران تضمین می کند. روش دوم، تعیین حق بیمه نسبی با استفاده از فضای پارامتری مقید بود. این روش علاوه بر مزیت امکان وارد کردن اطلاعات پیشین بیمه گذاران در برآورد حق بیمه نسبی، با حفظ شرط ترتیبی بودن حق بیمه های نسبی محاسبه شده برای سطوح سیستم پاداش - جریمه، برآوردهای عادلانه ای ارائه می دهد. مزیت دیگر این روش انعطاف پذیری بسیار نسبت به تغییر مفروضات اولیه سیستم از جمله متوسط فراوانی خسارت بیمه گذاران است. در نهایت نیز به ازای سه مقدار مختلف $\lambda \in \{0.0752, 0.03, 0.1\}$ ، مقادیر حق بیمه نسبی در سیستم پاداش - جریمه ایران با دو روش پیشنهادی محاسبه و با مقادیر مورد استفاده در شرکت های بیمه مورد مقایسه قرار گرفتند. نتایج مقایسه، بیانگر لزوم تغییر در سیستم پاداش - جریمه مورد استفاده در کشور است.

منابع

۱. پاینده نجف آبادی، الف.ت. ۱۳۹۳. تعیین روش بهینه محاسبه حق بیمه شخص ثالث، طرح پژوهشی به سفارش پژوهشکده بیمه، گروه بیمه‌های اموال و مسئولیت.
2. Abbas, A.E., 2002. An entropy approach for utility assignment in decision analysis. *The 22nd International Workshop on Bayesian Inference and Maximum-Entropy Model in Sciences, Engrg, Moscow*.
3. Abbas, A.E., 2006. Maximum-entropy utility. *Operation Research*, 54, pp. 277–290
4. Ayer, M., Brunk, H.D., Ewing, G.M., Reid, W.T. and Silverman, E., 1955. An empirical distribution function for sampling with incomplete information. *Ann. Math. Statist.*, 26, pp. 641-647.
5. Conrad, K., 2013. In probability distributions and maximum entropy. <<http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/entropypost.pdf>> [Accessed 18 May 2013].
6. Cover, T.M and Thomas, J.A., 2006, *Elements of information Theory*. New York: John Wiley and Sons.
7. Darooneh, A.H., 2004. Non-life insurance pricing: Multi agent model. *The European Physical Journal B—Condensed Matter and Complex Systems*, 42, pp. 119–122.
8. Darooneh, A.H., 2006. Utility Function from maximum entropy principle. *Entropy*, 8, pp. 18–24.
9. Denuit, M., Marechal, X., Pitrebois, S. and Walhin, J.F., 2007. *Actuarial modeling of claim counts: Risk classification, credibility and bonus-malus systems*, John Wiley & Sons.
10. Gelfand, A.E., Smith, A.F.M. and Lee, T.M., 1992. Bayesian analysis of constrained Parameter and truncated data problems using gibbs sampling. *Journal of the American Statistical Association*, 87(418), pp. 523-532.

11. Gelman, A. and Rubin, D.B., 1992. Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, 7, pp. 457-511.
12. Gilde, V. and Sundt, B., 1989. On bonus systems with credibility scales. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, pp. 13-22.
13. Gzyl, H., Novi-Inveradi, P.L. and Tagliani, A., 2013. Determination of probability of ultimate ruin by maximum entropy applied to fractional moments. *Insurance: Mathematics & Economics*, 53(2), pp. 457-463.
14. Jaynes, E.T., 1957. Information theory and statistical mechanics. *Physical Reviews*. 106, pp. 620-630.
15. Jessop, A., 1999. Entropy in multiattribute problems. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 8, pp. 61-70.
16. Krvavych, Y. and Mergel, V., 2000. Large loss distributions: Probabilistic properties, EVT tools, maximum entropy characterization. *Proceedings of the 31st ASTIN Colloquium*, Italy: Sardinia.
17. Kubokawa, T., 1994. A united approach to improving equivariant estimators, *annals of Statistics*, 22, pp. 290-299.
18. Kubokawa, T., 2005a. Estimation of bounded location and scale parameters. *Journal of the Japanese Statistical Society*, 35, pp. 221-249.
19. Kubokawa, T., 2005b. Estimation of a mean of a normal distribution with a bounded coefficient of variation. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, 67, pp. 499-525.
20. Landsman, Z., 1999. Credibility evaluation for the exponential dispersion Family. *Insurance: Mathematics and Economics*, 24, pp. 23-29.
21. Loimaranta, K., 1972. Some asymptotic properties of bonus systems. *ASTIN Bulletin*. 6, pp. 223-245.
22. Marchand, E. and Payandeh, A.T., 2011. Bayesian improvements of a MRE estimator of a bounded location parameter. *El. J. Statistics*, 5, pp. 1495-1502.

23. Marchand, E. and Strawderman, W.E., 2004. Estimation in restricted parameter spaces: A review. *Festschrift for Herman Rubin*, IMS Lecture Notes-Monograph Series, 45, pp. 21-44.
24. Norberg, R., 1976. A credibility theory for automobile bonus system. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2, pp. 92-107.
25. Pardo, L., 2006. *Statistical inference based on divergence measures*. Chapman & Hall/CRC.
26. Park, S.C., Lemaire, J. and Chua, C.T., 2010. Is the design of bonus-malus systems influenced by insurance maturity or national culture? Evidence from Asia. *The Geneva papers*. 35, pp. 7-27.
27. Payandeh, A.T., Hatami, H. and Omid Najafabadi, M., 2012. A maximum-entropy approach to the linear credibility formula. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(1), pp. 216–221.
28. Sachlas, A. and Papaioannou, T., 2014. Residual and past entropy in actuarial science and survival models. *Methodology and Computing in Applied Probability*. 16 (1), pp. 79-99.
29. Tremblay, L., 1992. Using the poisson inverse gaussian in bonus-malus systems. *ASTIN Bulletin*, 22, pp. 97-106.
30. Van-Eden, C., 1956. Maximum likelihood estimation of ordered probabilities. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.*, A (59), pp. 444-455.
31. Van-Eden, C., 1957a. Maximum likelihood estimation of partially or completely ordered parameters. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.*, A (60), pp. 128-136, 201-211.
32. Van-Eden, C., 1957b. Note on two methods for estimating ordered parameters of probability distributions. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.*, A (60), pp. 506-512.
33. Van-Eden, C., 1957c. A least squares inequality for maximum likelihood estimates of ordered parameters. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.*, A (60), pp. 513-521.
34. Van-Eden, C., 1958. *Testing and estimating ordered parameters of probability distributions*. Ph.D. Thesis, University of Amsterdam.

35. Walhin, J.F. and Paris, J., 1999. Using mixed poisson distribution in connection With Bonus-malus systems. *ASTIN Bulletin*. 29, pp. 81-99.
36. Zografos, K., 2008. On some entropy and divergence type measures of variability and dependence for mixed continuous and discrete variables. *J Stat Plan Inference*, 138, pp. 3899–3914.

